

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

**Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación
numérica para ecuaciones integrales**

TESIS

para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

AUTOR:

Frank Navarro Rojas

ASESOR:

Efraín Carbajal Peña

Lima, Perú

2011

ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA Y APROXIMACIÓN NUMÉRICA PARA ECUACIONES INTEGRALES

Frank Navarro Rojas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobada por:

Ph.D. Roxana López Cruz
Presidenta del jurado

Mg. Jorge Icaro Condado Jauregui
Miembro del jurado

Dr. Efraín Carbajal Peña
Miembro asesor

Lima-Perú
Diciembre-2011

FICHA CATALOGÁFICA

NAVARRO ROJAS, FRANK

Ecuaciones en Diferencias de Volterra y Aproximación Numérica para Ecuaciones Integrales , (Lima) 2011. (UNMSM, Licenciado, Matemáticas, 2011) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas

Dedicatoria

*A mi familia, especialmente a mi madre Victorina por su constante apoyo.
A las personas que en su momento se cruzaron en mi vida y me enseñaron
muchas cosas, en diferentes aspectos de la vida.*

*A todos los que dedicaron, dedican y dedicaran su tiempo, su vida, por
ampliar los conocimientos de esta hermosa ciencia llamada Matemática
para el desarrollo de un mundo mejor.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por darme alientos y motivos para la finalización de este trabajo.

Al Mg. Jorge Condado por su amabilidad y su disposición de tomarse la molestia de leer mi trabajo, y de brindarme sugerencias.

A mi asesor Dr. Efraín Carbajal por su paciencia, su confianza hacia mi persona y por sus sugerencias para la realización de este trabajo.

A la Ph.D. Roxana López, por su confianza, por su amabilidad y la completa disposición que ha mostrado en revisar mi trabajo. .

ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA Y APROXIMACIÓN NUMÉRICA PARA ECUACIONES INTEGRALES

FRANK NAVARRO ROJAS

Diciembre-2011

Asesor: Dr. Efraín Carbajal Peña

Titulo obtenido: Licenciado en matemáticas

Resumen:

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio de las propiedades cualitativas de cierta clase de ecuaciones en diferencias de Volterra, se muestran algunos criterios de estabilidad, acotación y periodicidad para las soluciones, una de las principales formas a través de la cual haremos tal análisis es mediante el uso de funciones auxiliares apropiadas, las cuales son conocidas como funciones de Lyapunov.

También se muestran algunos métodos de aproximación numérica para las soluciones de ecuaciones integrales de Volterra y se estudia el error al aplicar el método de cuadratura de Newton-Cotes, que nos conduce a una ecuación en diferencias de Volterra para el error, también se muestran algunos otros métodos como aproximación con polinomios ortogonales, polinomios de Bernstein y splines lineales y la simulación numérica correspondiente usando Matlab.

PALABRAS CLAVES:

Ecuaciones en Diferencias
Ecuaciones en Diferencias de Volterra
Ecuaciones Integrales
Métodos de Cuadratura
Interpolación Polinomial

VOLTERRA DIFFERENCE EQUATIONS AND NUMERICAL APPROXIMATION FOR INTEGRAL EQUATIONS

FRANK NAVARRO ROJAS

December-2011

Advisor: Dr. Efraín Carbajal Peña
Obtained Title: Licentiated in Mathematics

Abstract:

The objective of this work is do a study of the qualitative properties of certain kind of Volterra difference equations. We will show some criteria of stability, boundedness and periodicity for the solutions, One of the principal forms for means of whom we will do such analysis is using auxiliary function appropriate which is known and calls Lyapunov function.

We will also show some methods of numerical approximation for solutions Volterra integral equations, we will study the error when using the method of quadrature of Newton cotes, this conducts us a Volterra difference equation for the error. We will also show methods approximation with orthogonal polynomials, polynomials of Bernstein and linear splines and the correspondent numerical simulation using matlab. .

KEYWORDS :

Difference equations
Volterra Diference Equations
Integral equations
Methods of Quadrature
Polynomial Interpolation

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

1. PRELIMINARES

- 1.1. Ecuaciones integrales de Volterra
- 1.2. Ecuaciones en diferencias
- 1.3. La Z -transformada
- 1.4. Algunos resultados básicos de análisis funcional

2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA

- 2.1. Ecuación en diferencias de Volterra de tipo convolución caso escalar
- 2.2. Estabilidad via el método de Lyapunov
- 2.3. Sistemas de EDV de tipo no convolución
- 2.4. Periodicidad de las EDV
- 2.5. Acotaciones de las EDV
- 2.6. Una aplicación a la epidemiología

3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

- 3.1. Métodos de Newton-Cotes
- 3.2. Acotación del método directo de cuadratura
- 3.3. Aproximación de ecuaciones integrales de Volterra con Splines lineales
- 3.4. Aproximación de ecuaciones integrales mediante polinomios de Bernstein
- 3.5. Aproximación de ecuaciones integrales mediante polinomios ortogonales
- 3.6. Método de Newton-Cotes para ecuaciones integrodiferenciales

INTRODUCCIÓN

El nombre de ecuación integral aparece en 1888 en un artículo sobre ecuaciones parciales elípticas del científico alemán Paul Dubois Reymond.

El nombre "Ecuación Integral de Volterra" fue acuñada por primera vez por el matemático rumano Traian Lalesco en 1908. La terminología ecuación integral de primera (segunda, tercera) especie fue primeramente usada por el matemático alemán David Hilbert en conexión con sus estudios de ecuaciones integrales de Fredholm.

Los orígenes de la teoría cualitativa de las ecuaciones integrales con límite de integración superior variable se remontan al siglo 19, el matemático noruego Niel Hendrik Abel en sus publicaciones en 1823 y en 1826 considera el problema siguiente: Una partícula puntual se mueve bajo la acción de la fuerza de la gravedad y describe una curva suave en un plano vertical $\xi - \eta$, se pide determinar esta curva de modo que la partícula puntual que comienza su movimiento sin velocidad inicial en un punto de la curva cuya ordenada es x , luego alcance el eje ξ al cabo de un tiempo $t = f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es una función dada.

El muestra que este problema puede ser descrito por una ecuación integral de primera especie de la forma:

$$\int_0^x (x-s)^{-\alpha} y(s) ds = f(x)$$

donde la función incógnita es $y(x)$ con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $f(x) = cf_1(x)$ con c constante, el entonces prueba que para el caso general: $\alpha \in (0, 1)$, la solución de esta ecuación es dada por la fórmula de inversión:

$$y(x) = c_\alpha \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right)$$

donde $c_\alpha = \sin(\alpha\pi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$

En 1896 el matemático italiano Vito Volterra publica su teoría general de inversión de ecuaciones integrales de primera especie, él transformó la ecuación integral de primera especie:

$$\int_0^t k(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad f(0) = 0$$

en una ecuación integral de segunda especie donde el núcleo y la función de forzamiento son respectivamente:

$$\tilde{k}(t, s) = -\frac{\partial k(t, s)}{\partial t} \cdot \frac{1}{k(t, t)}$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{f'(t)}{k(t, t)}$$

Si $k(t, t) \neq 0$ en I y si las derivadas de k y f son continuas entonces la única solución de la ecuación anterior es dado por la formula de inversión.

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \tilde{R}(x, s)f(s)ds$$

Para $x \in I$, donde $\tilde{R}(t, s)$ es llamado la resolvente del núcleo de $\tilde{k}(t, s)$ y es definido en terminos de los núcleos iterados \tilde{k}_n de \tilde{k} .

Volterra prueba que esta sucesion \tilde{k}_n , converge absoluta y uniformemente en $Dom(\tilde{k})$ para cualquier nucleo k .

Si bien el resultado de Volterra fue nuevo, su método no fue enteramente nuevo. En su tesis de 1894, el matemático francés Joel Le Roux ya había estudiado el problema de invertir la ecuación integral anterior, usando el mismo acercamiento. También las ecuaciones integrales de segunda especie con límite de integración variable estuvieron presentes en los trabajos de Liouville en 1837.

La noción de los núcleos iterados y la series de Neumann asociadas fueron primeramente usada por matemático francés Joseph Caque en 1864. Generalizando estas ideas Liouville, estudió la solución de la ecuación diferencial lineal de orden $(p + 1)$

$$y^{p+1} = \sum_{j=0}^p A_j(t)y^j + A(t)$$

que la reescribio como una ecuación integral de Volterra de segundo especie con el núcleo dado por:

$$k(t, s) = \sum_{j=0}^p \frac{A_j(s)(t-s)^{p-j}}{(p-j)!}$$

En otro articulo en el año 1896 Volterra extendio sus ideas para la ecuación integral lineal de primera especie con núcleo débilmente singular. Usando el

acercamiento empleado por Abel para establecer la fórmula de inversión, él mostró que la ecuación:

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} k(t,s)y(s)ds = f(t), t \in [0, T], 0 < \alpha < 1$$

Puede ser transformado en una ecuación de primera especie con núcleo regular, para cuál aplico la teoría de su primer trabajo. Los siguientes dos artículos de Volterra de 1896 se relacionan con el análisis de ecuaciones integrales de tercera especie. En los siguientes cuarenta años se consolidó los trabajos de Volterra, durante este tiempo la etapa central perteneció al estudio de ecuaciones integrales de Volterra y sus implicaciones en el desarrollo del análisis funcional. Desde más o menos 1960 se ha renovado el interés en las propiedades cualitativas y asintóticas de las soluciones de las ecuaciones de Volterra.

Es bien sabido que un problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria equivale a una ecuación integral de Volterra. Así, varios métodos (numéricos) para la aproximación a las soluciones de un PVI pueden ser aplicados a la resolución de ecuaciones integrales

Probablemente lo que más ampliamente se acostumbra a estudiar son las clases de métodos de Runge-Kutta para los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias; estos métodos fueron introducidos al inicio del siglo 20. La teoría moderna de esta clase de métodos es debido a J.C. Butcher por los años de 1960, al mismo tiempo, P. Pouzet y B.A. Bel'tyukov extienden la idea de Runge-Kutta en diferentes formas a la ecuación integral de Volterra de segunda especie con núcleo acotado.

A finales de 1970 y a inicios de 1980 un análisis sistemático de los métodos de Runge-Kutta para las ecuaciones integrales de segunda especie fue desarrollado por H. Brunner, E. Hairer and S. Norsett entre otros.

En muchos problemas científicos y de ingeniería las ecuaciones integrales de Volterra están presentes y ha atraído mucho la atención de hallar métodos analíticos y numéricos para su solución. Entre las aplicaciones de las ecuaciones integrales de Volterra tenemos por ejemplo: dinámica demográfica, difusión de epidemias, dispositivos semiconductores, superfluidez, problemas inversos, etc.

En las últimas décadas las ecuaciones en diferencias de Volterra han sido objeto de intensas investigaciones. Esto se debe a dos razones principales. Una de ellas consiste en las relaciones y analogías existentes entre estas ecuaciones y ecuaciones sobre las cuales el conocimiento teórico está consolidado, como

ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales. otra causa del interés es su gran utilidades en el modelaje de diversos problemas específicos en áreas tales como: mecánica de flúidos, biofísica, óptica, modelado biomédico, ecología, (dinámica de la población), problemas del control, biomecánica, epidemias y esquemas de aproximación numérica para ecuaciones integrales y integro-diferenciales de volterra, etc.

La mayor parte de ecuaciones integrales e integro-diferenciais de Volterra que aparecen en las aplicaciones no pueden ser resueltas analíticamente. En esos casos, para obtener una aproximación a la solución exacta, es preciso recurrir a métodos numéricos para discretizar aquellas ecuaciones.

El trabajo se organiza como sigue: en la primera parte introducimos las ecuaciones integrales de volterra , mostramos condiciones de existencia y unicidad de soluciones y propiedades de estas, tambien se menciona los aspectos mas relevantes sobre ecuaciones en diferencias que seran extendidad de alguna manera en el capitulo II.

En la segunda parte consideraremos las ecuaciones en diferencia de Volterra de segunda especie, se consideraran dos tipos: tipo convolucion, de no convolucion se estudia las acotaciones, la periodicidad, y la estabilidad para sus soluciones. En la tercera parte consideramos la discretizacion de las ecuaciones integrales de de Volterra mostrando métodos para su solución numérica e implementaremos estos metodos en programas usando matlab.

CAPITULO I

1.- PRELIMINARES

1.1.- Ecuaciones integrales de Volterra

Sea $I = [0, T]$ un intervalo con $T > 0$ y consideremos el triangulo $S = \{(t, s)/0 \leq s \leq t \leq T\}$ la ecuación integral de Volterra (EIV) para la función desconocida y es de la forma:

$$\theta(t)y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s))ds \quad t \in I$$

donde $\theta, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Donde k es llamado núcleo de la ecuación y la función θ determina la clasificación de la EIV.

- EIV de primera especie, si θ es idénticamente nula en tal caso se reduce a:

$$-g(t) = \int_0^t k(t, s, y(s))ds \quad t \in I$$

- EIV de segunda especie. Si $\theta(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ en tal caso se puede escribir como:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s))ds \quad t \in I$$

- EIV de tercera especie, si θ es una función continua que posee un número finito de ceros en I .
- Una EIV es llamada lineal si su núcleo es de la forma:

$$k(t, s, y) = \bar{k}(t, s)y$$

- Es llamada de convolución si es de la forma:

$$k(t, s, y) = \bar{k}(t - s, y)$$

- Es llamada de Hammerstein si es de la forma:

$$k(t, s, y) = \bar{k}(t, s).g(s, y)$$

- Es llamada de Abel si es de la forma:

$$k(t, s, y) = (t - s)^{-\alpha} \gamma(t, s, y), \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde γ es una función diferenciable en $S \times \mathbb{R}$

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución para la EIV lineal

Teorema 1.1.- Consideremos la EIV lineal

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)y(s)ds \quad t \in I \quad (1)$$

Si k y g son continuas en S e I respectivamente entonces la ecuación integral (1) posee una única solución continua en I .

Prueba

Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ definamos:

$$y_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)y_{n-1}(s)ds \quad (2)$$

con $y_0(t) = g(t)$

Debido a la continuidad de g y k , y_n es continua en I para $n = 0, 1, 2, \dots$ definamos para cada $n = 0, 2, \dots$

$$\phi_n(t) = y_n(t) - y_{n-1}(t) \quad (3)$$

con $\phi_0(t) = g(t)$

Claramente cada ϕ_n es continua en I

Apartir de (3) se obtiene

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t)$$

Sustituyendo en (2), n por $n - 1$ y restando de (2) obtenemos

$$\phi_n(t) = \int_0^t k(t, s)\phi_{n-1}(s)ds$$

Como k y g son continuas sobre los compactos S, I respectivamente existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que

$$|g(t)| \leq C_1 \quad \text{para toda } t \in I$$

$$|k(t, s)| \leq C_2 \quad \text{para todo } (t, s) \in S$$

Ahora veamos por inducción que:

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{C_1(C_2t)^n}{n!} \quad \text{para toda } t \in I$$

Para $n = 0$ es obvio, supongamos válida para $n = m$ veamos que es válido para $n = m + 1$

$$\begin{aligned} |\phi_{m+1}(t)| &= \left| \int_0^t k(t, s) \phi_m(s) ds \right| \leq \int_0^t |k(t, s) \phi_m(s)| ds \\ &\leq \frac{C_1(C_2)^{m+1}}{m!} \int_0^t s^m ds = \frac{C_1(C_2)^{m+1}}{m!} \frac{t^{m+1}}{m+1} = \frac{C_1(C_2t)^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

luego $\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t)$ es normalmente convergente, luego uniformemente convergente, por lo tanto $\{y_n\}$ converge uniformemente a una función continua $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t)$$

Veamos que y es solución de (1) en efecto:

$$\begin{aligned} \int_0^t k(t, s) y(s) ds &= \int_0^t k(t, s) \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t k(t, s) \phi_i(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{i+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) - g(t) \\ &= y(t) - g(t) \end{aligned}$$

ahora mostraremos que y es la única solución continua que satisface la ecuación sobre $[0, T]$

Supongamos que exista otra solución continua \tilde{y} de (1) sobre $[0, T]$, entonces:

$$y(t) - \tilde{y}(t) = \int_0^t k(t, s) [y(s) - \tilde{y}(s)] ds \quad (4)$$

Como $y - \tilde{y}$ es continua existe una constante $M > 0$ tal que

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq M, \quad \text{para toda } t \in I$$

Sustituyendo esto en (4) obtenemos

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq MC_2 t, \quad \text{para toda } t \in I$$

Por inducción tenemos para toda $n = 0, 1, \dots$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \frac{M(C_2 t)^n}{n!}, \quad \text{para toda } t \in I$$

como el lado derecho converge a 0 para todo t cuando $n \rightarrow +\infty$ de esto se desprende que:

$$y(t) = \tilde{y}(t), \quad \text{para todo } t \in I$$

Esto prueba el teorema.

Observaciones

- Toda solución integrable de (1) bajo las condiciones del teorema (1.1) es continua: en efecto sea h una función integrable solución de (1) y sea f la única solución continua de (1) puesto que h es integrable entonces es acotada, obviamente f también lo es, luego $f - h$ es acotada luego seguimos los mismos pasos desde (4) para obtener $f(t) = h(t)$ para $t \in [0, T]$
- Un caso más general se puede obtener de la siguiente manera: Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones continuas en $[0, T]$ que verifican $0 \leq p(t) \leq q(t) \leq t$ bajo las condiciones del teorema la ecuación

$$f(t) = g(t) + \int_{p(t)}^{q(t)} k(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

posee una única solución continua

Ahora expresaremos la solución de la EIV en términos de la resolvente

La resolvente del núcleo

Con las hipótesis del teorema anterior; en su demostración definimos las funciones ϕ_n como:

$$\phi_n(t) = \int_0^t k(t, s)\phi_{n-1}(s)ds$$

con $\phi_0(t) = g(t)$

Se puede dar otra apariencia a las funciones ϕ_n de la siguiente manera

$$\phi_n(t) = \int_0^t k_n(t, s)g(s)ds, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Donde

$$k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau)k_{n-1}(\tau, s)d\tau \quad (5)$$

con $k_1(t, s) = k(t, s)$

par Los $k_i(t, s)$ son llamados núcleos iterados.

Si $|k(t, s)| \leq C_2$ en S se sigue por inducción en (5) que:

$$|k_n(t, s)| \leq \frac{C_2^2(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Se deduce que :

$$\Gamma(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t, s)$$

es una serie que converge uniformemente para $0 \leq s \leq t \leq T$, esta función es llamada la resolvente del núcleo para $k(t, s)$, la resolvente del núcleo satisface también una ecuación integral, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2.- Si k es continua en S , la resolvente del núcleo satisface la ecuación:

$$\Gamma(t, s) = k(t, s) + \int_s^t \Gamma(\tau, s)k(t, \tau)d\tau, \text{ para } 0 \leq s \leq t \leq T$$

Prueba

La prueba se deduce de la definición de la resolvente ver [12].

El siguiente teorema expresa la solución de la ecuación lineal en términos de la resolvente del núcleo.

Teorema 1.3.- Si k , g son continuas en S e I respectivamente entonces la única solución continua de (1) es dada por:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t \Gamma(t, s)g(s)ds$$

Prueba

La prueba se deduce de la definición de la resolvente ver [12].

Ejemplo 1.1

Hallar la solución de la ecuación integral:

$$y(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2}y(s)ds$$

Hallamos los núcleos iterados

$$\begin{aligned} k_1(t, s) &= e^{t^2-s^2} \\ k_2(t, s) &= e^{t^2-s^2}(t-s) \\ k_3(t, s) &= e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^2}{2} \end{aligned}$$

Asi por inducción tenemos que

$$k_n(t, s) = e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Luego

$$\Gamma(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} = e^{t^2-s^2}e^{t-s}$$

luego según el teorema (1.3) se tiene :

$$y(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2}e^{t-s}e^{s^2}ds = -e^{t^2} + e^{t^2+t}$$

Definición 1.1

Si el núcleo de la EIV es función de $t - s$ únicamente i.e

$$k(t, s) = k(t - s)$$

entonces k es llamado un núcleo en diferencias.

Teorema 1.4.- Si k es un núcleo en diferencias, y $k(t)$, $g(t)$ son continuas entonces la única solución de (1) es dada por

$$f(t) = g(t) + \int_0^t R(t - s)g(s)ds \quad (6)$$

donde la resolvente del núcleo $R(t)$ es solución de

$$R(t) = k(t) + \int_0^t k(t - s)R(s)ds \quad (7)$$

Prueba

Nótese que con las condiciones anteriores $k(t - s)$ es continua, sea $R(t)$ la única solución continua de (7) veamos que $f(t)$ definida por (6) es solución de (1) con núcleo $k(t - s)$.

$$\begin{aligned} \int_0^t k(t - s)f(s)ds &= \int_0^t k(t - s) \left\{ g(s) + \int_0^s R(s - \tau)g(\tau)d\tau \right\} ds \\ &= \int_0^t k(t - s)g(s)ds + \int_0^t \left\{ \int_0^s k(t - s)R(s - \tau)g(\tau)d\tau \right\} ds \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración en la segunda integral tenemos

$$\int_0^t k(t - s)f(s)ds = \int_0^t k(t - s)g(s)ds + \int_0^t \left\{ \int_\tau^t k(t - s)R(s - \tau)ds \right\} g(\tau)d\tau$$

Luego haciendo el cambio de variable $s - \tau = u$ en la integral dentro del corchete para obtener

$$\int_\tau^t k(t - s)R(s - \tau)ds = \int_0^{t-\tau} k(t - u - \tau)R(u)du = R(t - \tau) - k(t - \tau)$$

la ultima igualdad esta dada por (7) finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t k(t - s)f(s)ds &= \int_0^t k(t - s)g(s)ds + \int_0^t \{R(t - \tau) - k(t - \tau)\} g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t R(t - \tau)g(\tau)d\tau = f(t) - g(t) \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se desprende de (6). Esto concluye la prueba.

Teorema 1.5.- Consideremos la EIV no lineal. Si g es continua en I y k continua en S y satisface la condición de Lipschitz en la tercera variable i.e

$$|k(t, s, y) - k(t, s, z)| \leq L |y - z|$$

donde $L > 0$ es independiente de t, s, y, z , entonces la ecuación integral no lineal posee una única solución continua en I

Para la demostración usaremos un corolario del teorema del punto fijo de Banach

Sea (M, d) un espacio métrico completo. Si $F : M \rightarrow M$ es continua y existe un $n_0 \geq 1$ entero tal que F^{n_0} es una contracción entonces existe un único punto $x_0 \in M$ tal que x_0 es un punto fijo atractor de F

Demostración del teorema:

Consideremos el espacio métrico $C([0, T], \mathbb{R})$, con la métrica inducida por la norma:

$$\|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$$

y consideremos la aplicación:

$$F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R}), \quad f \rightarrow F(f)$$

donde $F(f)$ es definida como:

$$F(f)(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, f(s)) ds, \quad t \in [0, T]$$

Claramente $F(f)$ es continua.

Vamos a probar que existe $m \geq 1$ tal que F^m es una contracción. denotemos con $E = C([0, T], \mathbb{R})$

Sean u y v elementos de E y sea $t \in [0, T]$

Afirmamos que para toda $n \geq 1$:

$$\|F^n(u) - F^n(v)\| \leq \frac{L^n F^n}{n!} \|u - v\| \quad (8)$$

En efecto:

Para $n = 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &= \left| \int_0^t \{k(t, s, u(s)) - k(t, s, v(s))\} ds \right| \\
&\leq L \int_0^t |u(s) - v(s)| \\
&\leq L \|u - v\| t \leq L \|u - v\| T
\end{aligned}$$

de donde se tiene que:

$$\|F(u) - F(v)\| \leq LT \|u - v\|$$

y F es continua por ser Lipchitziana.

Supongamos valido para $n = m$ veamos su validez para $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
|F^{m+1}(u)(t) - F^{m+1}(v)(t)| &= |F(F^m(u))(t) - F(F^m(v))(t)| \\
&= \left| \int_0^t \{k(t, s, F^m(u)(s)) - k(t, s, F^m(v)(s))\} ds \right| \\
&\leq \int_0^t L |F^m(u)(s) - F^m(v)(s)| \\
&\leq \int_0^t L \frac{L^m s^m}{m!} \|u - v\| ds \\
&\leq \frac{L^{m+1} T^{m+1}}{(m+1)!} \|u - v\|, \quad \text{para } t \in [0, T]
\end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\|F^{m+1}(u) - F^{m+1}(v)\| \leq \frac{L^{m+1} T^{m+1}}{(m+1)!} \|u - v\|$$

De donde se tiene (8), luego puesto que la sucesión $(\frac{L^n T^n}{n!})$ converge a 0 existe un n_0 tal que $\frac{L^{n_0} T^{n_0}}{n_0!} < 1$ entonces F^{n_0} es una contracción de donde obtenemos la conclusión del teorema

Ejemplo 1.2

Considere la ecuación integral :

$$f(t) = 1 + \int_0^t \frac{\sin(t-s)}{1+f^2(s)} ds$$

Se tiene que g es continua en I (para cualquier $T > 0$), veamos que k satisface la condición de Lipzchitz en la tercera variable, sean y, z entonces :

$$\begin{aligned} |k(t, s, y) - k(t, s, z)| &= \left| \frac{\sin(t-s)}{1+y^2} - \frac{\sin(t-s)}{1+z^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{y^2 - z^2}{(1+y^2)(1+z^2)} \right| \leq \left| (y-z) \frac{y+z}{(1+y^2)(1+z^2)} \right| \\ &\leq 2|y-z| \end{aligned}$$

puesto que se verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |y| &\leq (1+y^2)(1+z^2) \\ |z| &\leq (1+y^2)(1+z^2) \end{aligned}$$

luego la ecuación posee una única solución continua.

El siguiente teorema guarda analogía con el clásico teorema de comparación de series, y sirve para poder acotar la solución de una ecuación integral.

Teorema 1.6.- Asumamos que el núcleo $k(t, s)$ de la EIV lineal es absolutamente integrable con respecto a s para toda $0 \leq t \leq T$ y que la ecuación (1) posee una solución continua. Asumamos además que existen funciones $G(t)$ y $K(t, s)$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} |g(t)| &< G(t), \text{ para } 0 \leq t \leq T \\ |k(t, s)| &< K(t, s) \text{ para } 0 \leq s \leq t \leq T \end{aligned}$$

y tal que la ecuación integral

$$Y(t) = G(t) + \int_0^t K(t, s)Y(s)ds \quad (9)$$

posee solución continua $Y(t)$ para $0 \leq t \leq T$.

Entonces

$$|y(t)| < Y(t) \text{ para } 0 \leq t \leq T$$

Prueba:

Como $y(t)$ es solución de la EIV lineal (1) tenemos que

$$|y(t)| \leq |g(t)| + \int_0^t |k(t, s)| |y(s)| ds < G(t) + \int_0^t K(t, s) |y(s)| ds$$

substrayendo de (9) obtenemos para $0 \leq t \leq T$:

$$Y(t) - |y(t)| > \int_0^t K(t, s) \{Y(s) - |y(s)|\} ds$$

De donde $Y(0) - |y(0)| > 0$ luego existe un entorno $\langle 0, \delta \rangle$ tal que $Y(t) - |y(t)| > 0$. Sea el conjunto $\{t : t \in [\delta, T], Y(t) - |y(t)| = 0\}$ que es compacto, si no fuera vacío sea $t^* = \min \{t : t \in [\delta, T], Y(t) - |y(t)| = 0\}$ entonces $Y(t^*) - |y(t^*)| = 0$; más

$$\int_0^{t^*} K(t^*, s) \{Y(s) - |y(s)|\} ds > 0$$

luego no existe tal t^* por lo tanto $Y(t) > |y(t)|$ para $0 \leq t \leq T$

Ejemplo 1.3

Sea y solución de la EIV lineal dada por:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)y(s)ds$$

si g y k son acotados por

$$|k(t, s)| < K, \quad |g(t)| < G$$

Consideremos la ecuación:

$$Y(t) = c + \int_0^t KY(s)ds$$

cuya solución es ce^{Kt} . Entonces por el teorema tenemos que:

$$|y(t)| < ce^{Kt} \text{ para } 0 \leq t \leq T$$

Transformada de Laplace

Una de las herramientas para resolver ecuaciones integrales lineales de tipo convolucion es la transformada de Laplace

Recordemos la definición de convolución para dos funciones:

$$(f_1 * f_2) = \int_0^t f_1(t-s)f_2(s)ds$$

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ de orden exponencial es denotada con f^* y definida por:

$$f^*(w) = \ell(f)(w) = \int_0^{\infty} e^{-wt} f(t) dt$$

donde w es un número complejo. Esta definición es dada siempre que la integral converja, que por lo general ocurre en un semiplano de la forma $Re(w) \geq w_0$ para algún w_0 .

La transformada inversa de Laplace de la función $u(w)$ es definido por:

$$\ell^{-1}(u)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{wt} u(w) dw$$

Se verifica que:

$$\ell^{-1}(f^*)(t) = f(t)$$

El número real a es tal que todas las singularidades de f^* yacen al lado izquierdo del camino de integración

Teorema 1.7.- Si f_1 y f_2 son funciones absolutamente integrables sobre $[0; T]$. Si además $\ell(f_1)$, $\ell(f_2)$ son absolutamente convergentes para $Re(w) \geq w_0$ entonces

$$\ell(f_1 * f_2) = \ell(f_1) \cdot \ell(f_2)$$

para $Re(w) \geq w_0$

Consideremos la ecuación integral de tipo convolución lineal

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t-s)f(s) ds$$

Por las definiciones dadas esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$f = g + k * f$$

aplicando a ambos miembros el operador de Laplace, utilizando la linealidad, el teorema (1.7) y despejando f^* obtenemos:

$$f^* = \frac{g^*}{1 - k^*}$$

y aplicando la transformada inversa obtenemos:

$$f = \ell^{-1} \left(\frac{g^*}{1 - k^*} \right)$$

Ejemplo 1.4

Hallar la solución de la EIV dada por:

$$f(t) = 1 + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} f(s) ds$$

Para este ejemplo tenemos que

$$g^* = 1/w; \quad k^* = \frac{1}{w - \alpha}$$

luego:

$$f^* = \frac{w - \alpha}{w(w - \alpha - 1)}$$

de donde se tiene que:

$$f^* = \frac{1}{w} - \frac{1}{(\alpha + 1)w} + \frac{1}{(\alpha + 1)(w - \alpha - 1)}$$

tomando la transformada inversa tenemos que:

$$f(t) = 1 - \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1} e^{t(\alpha+1)}$$

En esta sección enunciamos los resultados principales sobre ecuaciones en diferencias que en el Capítulo (2) serán generalizadas en cierto modo; también se podrá ver la analogía en muchas ocasiones con las ecuaciones diferenciales lineales

1.2.- Ecuaciones en diferencias

La forma de una ecuación en diferencias lineal de orden k no homogénea es dada por

$$y(n + k) + p_1(n)y(n + k - 1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n) \quad (10)$$

Donde p_i, g son sucesiones dadas definidas para $n \geq n_0$ y $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Si g es idénticamente nula la ecuación se llama homogénea, podemos reescribir esta ecuación en la forma:

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - \dots - p_k(n)y(n) + g(n)$$

Por ejemplo si $n_0 = 0$ se obtiene $y(k)$ en terminos de los k valores $y(k-1), y(k-2), \dots, y(0)$, que se pueden tener como dados; de manera explícita tenemos que:

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - \dots - p_k(0)y(0) + g(0)$$

Una vez calculado el valor de $y(k)$ podemos calcular $y(k+1)$ reemplazando $n = 1$ esto nos da:

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - \dots - p_k(1)y(1) + g(1)$$

Repetiendo este proceso es posible obtener el valor de $y(n)$ para todo $n \geq k$ conociendo solo los k valores anteriores.

Ejemplo 1.5

Consideremos la ecuación en diferencias lineal de tercer orden

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n$$

Dados los valores $y(1) = 0, y(2) = -1, y(3) = 1$, podemos obtener todos los valores para $n \geq 4$

Asi tomando $n = 1$ nosotros tenemos:

$$y(4) = \frac{1}{2}y(3) - y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{5}{2}$$

Tomando $n = 2$

$$y(5) = \frac{2}{3}y(4) - y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}$$

y así sucesivamente.

De manera formal una solución para la ecuación en diferencias lineal (10) es una sucesión $\{y(n)\}_{n_0}^{\infty}$ que satisface la ecuación para $n \geq n_0$.

También para la ecuación (10) definimos el correspondiente problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n) \\ y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \dots, y(n_0+k-1) = a_{k-1} \end{cases} \quad (11)$$

donde los a_i son números reales dados.

Teorema 1.8.- El problema de valores iniciales (11) posee una única solución definida para $n \geq n_0$

Prueba

Ver [2].

A continuación enunciaremos algunos resultados importantes sobre la teoría de las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas, consideremos la ecuación de orden k :

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = 0 \quad (12)$$

Con $S_{n_0}(\mathbb{R}^m)$ denotaremos en espacio vectorial de todas las sucesiones definidas para $n \geq n_0$ con valores en \mathbb{R}^m

Sea S el conjunto de soluciones de (12) para $n \geq n_0$ con las operaciones $+$, \cdot definidas como :

- (i) $(x+y)(n) = x(n) + y(n)$ para toda $x, y \in S, n \geq n_0$
- (ii) $(ax)(n) = ax(n), n \geq n_0$, para $x \in S, a$ constante

Con estas operaciones se tiene que $(S, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial real de $S_{n_0}(\mathbb{R}^m)$.

Definición 1.2

El conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq S_{n_0}(\mathbb{R}^m)$ es llamado linealmente dependientes para $n \geq n_0$ si existen constantes a_1, a_2, \dots, a_r no todas cero tal que:

$$a_1x_1(n) + \dots + a_rx_r(n) = 0 \quad \text{para, } n \geq n_0$$

Caso contrario diremos que es linealmente independiente.

Ejemplo 1.6

Las sucesiones $(7^n), (n7^n), (n^37^n)$ son linealmente independientes para $n \geq 1$ en efecto

Si $a7^n + bn7^n + cn^37^n = 0$, dividiendo esta igualdad entre 7^n se obtiene $a + bn + cn^3 = 0$, si no todos los escalares fueran 0 obtendríamos un polinomio de grado a lo más 3 que se anula en infinitos puntos lo cual es absurdo.

Definición 1.3

Un conjunto de k soluciones linealmente independientes de (12) es llamado un conjunto fundamental de soluciones de (12).

La siguiente definición nos proporciona un método práctico para comprobar la independencia lineal de sucesiones.

Definición 1.4

Definimos el casoratian de las sucesiones $x_1, x_2, \dots, x_r \in S_{n_0}(\mathbb{R}^m)$ como la sucesión dada por:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

El cálculo del casoratian, para un conjunto de soluciones de (12), se puede realizar de manera práctica por medio de:

Lema 1.1(Lema de Abel)

Si x_1, x_2, \dots, x_k son soluciones de la ecuación homogénea (12) para $n \geq n_0$ y sea $W(n)$ su Casoratian, entonces para $n \geq n_0$:

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0)$$

Prueba

La prueba se basa en propiedades de determinantes, para el caso $n = 3$ ver [2].

Corolario 1.1

Si $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$; entonces $W(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ si y solo si $W(n_0) \neq 0$

Prueba. Ver [2].

Corolario 1.2

El conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (12) para $n \geq n_0$ si y solo si $W(n_0) \neq 0$

Prueba. Ver [2].

Teorema 1.9.- (Teorema fundamental). Si $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ entonces (12) posee un conjunto fundamental de soluciones para $n \geq n_0$

Prueba. Ver [2].

Por otro lado si $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (12) y sea $x(n)$ una solución cualesquiera de (12) entonces existen constantes a_1, a_2, \dots, a_k tal que:

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i x_k(n)$$

Teorema 1.10 .- La terna $(S, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión k

Prueba. Ver [2].

Ecuaciones en diferencias lineales no homogéneas

Consideremos la ecuación:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n) \quad (13)$$

Donde $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

El teorema siguiente nos asegura la existencia de soluciones de (13) y nos da la forma que poseen.

Teorema 1.11 .- La solución general $y(n)$ de (13) puede escribirse como:

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n)$$

Donde $y_p(n)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea y la solución complementaria $y_c(n)$ es solución general de la ecuación en diferencias homogénea asociada y viene dada en la forma:

$$y_c(n) = \sum_{i=1}^k c_i x_i(n)$$

Donde $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ forman una base de S .

Prueba. Ver [2].

El cálculo de la solución particular para cierta clase de funciones $g(n)$ se pueden obtener usando los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

Ejemplo 1.7

Consideremos la ecuación en diferencias no homogénea:

$$y(n+2) + 3y(n+1) - 10y(n) = (n+1)3^n$$

Las raíces características de la ecuación homogénea asociada $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ son $\lambda = -5$, $\lambda = 2$ luego la solución general de la ecuación homogénea sera:

$$y_c(n) = c_1 2^n + c_2 (-5)^n$$

Por el método de coeficientes indeterminados obtenemos que la solución particular tiene la forma

$$y_p(n) = An + B3^n$$

Sustituyendo esta función en la ecuación obtenemos los valores de A y B
 $A = 1/8$ y $B = -19/64$
 luego la solución general viene dada por:

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 (-5)^n + \frac{n}{8} - \frac{19}{64} 3^n$$

Sistema de Ecuaciones en diferencias

Consideremos el siguiente sistema de m ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes

$$\begin{array}{llll} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) & \dots & + a_{1m}x_m(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) & \dots & + a_{2m}x_m(n) \\ \vdots & & \vdots \\ x_m(n+1) = a_{m1}x_1(n) + a_{m2}x_2(n) & \dots & + a_{mm}x_m(n) \end{array}$$

Este sistema puede ser escrito en forma matricial

$$x(n+1) = Ax(n)$$

Donde $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n))$ y $A = (a_{ij})$ $i, j = 1 \dots m$ es una matriz real de orden $m \times m$ no singular. En el caso que A no depende de n el sistema se llama autonomo.

Si para algun $n_0 \geq 0$ se especifica su valor $x(n_0) = x_0$ el sistema con esta condición se llama un problema de valor inicial.

Por una simple iteración podemos deducir que la solución del PVI viene dado por:

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 \quad \text{para } n \geq n_0$$

Donde $A^0 = I$ es la matriz identidad de orden $m \times m$. Un sistema de la forma :

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{14}$$

Donde $A(n)$ es una función matricial no singular para cada n , es llamado no autónomo homogéneo. El correspondiente sistema no homogéneo con condicion inicial es dado por :

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n); x(n_0) = x_0 \quad (15)$$

Donde $g(n), x_0 \in \mathbb{R}^m$

Los siguientes resultados establecen la existencia y unicidad de la solución de (14).

Teorema 1.12 .- Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, existe una única solución $x(n, n_0, x_0)$ de (14) que satisface $x(n, n_0, x_0) = x_0$ y es dada por:

$$x(n, n_0, x_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0$$

Prueba. Ver [12].

Sea $\Phi(n)$ la matriz de orden $m \times m$ cuyas columnas son soluciones de (14) que lo denotaremos por:

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]$$

Entonces es inmediato ver que $\Phi(n)$ satisface la ecuación en diferencias siguiente:

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n) \quad (16)$$

Ademas si $x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)$ son l.i para $n \geq n_0$ si y solo si $\det \Phi(n) \neq 0$ para $n \geq n_0$

Definición 1.5 .- Si $\Phi(n)$ es una matriz no singular para $n \geq n_0$ y satisface la ecuación (16) entonces es llamada matriz fundamental para el sistema de ecuaciones en diferencias (14).

Teorema 1.12 .- La ecuacion matricial (16) posee una única solución $\phi(n)$ satisfaciendo $\phi(n_0) = I$ que la denotaremos con $\Phi(n, n_0)$

Prueba. Ver [12].

Corolario 1.3 .- La única solución $x(n, n_0, x_0)$ de (14) satisfaciendo $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ es dada por:

$$x(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)x_0$$

Si x_1, x_2, \dots, x_k son soluciones de (14) entonces la sucesión

$$y(n) = \sum_{i=1}^m c_i x_i(n)$$

es también solución de (14) donde los c_i son constantes reales arbitrarias.

De los resultados anteriores se deduce que $\{x_i(n)/1 \leq i \leq m\}$ es un conjunto de soluciones l.i de (14) entonces toda solución $y(n)$ de (14) se escribe como

$$x(n) = \sum_{i=1}^m c_i x_i(n)$$

para ciertas constantes reales c_i .

Esta última ecuación se puede escribir en términos de la matriz fundamental como:

$$y(n) = \Phi(n)C$$

Donde $\Phi(n)$ es una matriz fundamental y C es un vector columna en \mathbb{R}^m

Teorema 1.13 .- Toda solución $x(n)$ de (15) se puede escribirse en la forma :

$$x(n) = \Phi(n)C + x_p(n)$$

Donde C es un vector columna en \mathbb{R}^m y $x_p(n)$ es una solución particular de la ecuación (15)

Prueba. Ver [2].

Lema 1.2 .- La solución particular de (15) es dada como :

$$x_p(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, i+1)g(i)$$

con $x_p(n_0) = 0$

Prueba. Ver [2].

Teorema 1.14 .- (Variación de parámetros) La única solución del problema de valor inicial:

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n)$$

, $y(n_0) = y_0$ viene dada por :

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} \Phi(n, i+1)g(i)$$

De manera más explicita se tiene que:

$$y(n, n_0, y_0) = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} A(j) \right) y_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} A(j) \right)$$

Prueba. Ver [12].

Ejemplo 1.8 Consideremos el siguiente sistema:

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n)$$

Donde :

$$A(n) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$g(n) = \begin{pmatrix} 6^n \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando el algoritmo de putzer obtenemos que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por el teorema 1.14 tenemos que $y(n)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} y(n) &= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 3^{n-i-1} & (n-i-1)3^{n-i-2} \\ 0 & 3^{n-i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^i \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n + n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 3^{n-1}2^i + (n-i-1)3^{n-i} \\ 3^{n-i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n + n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (6^n/3 - 3^{n-1} + (21 - 3^{n+1}(3-2n))/4) \\ (3^{n+2} - 9)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estabilidad para ecuaciones en diferencias

Consideremos la ecuación vectorial en diferencias con condición inicial:

$$y(n+1) = g(n, y(n)) \quad y(n_0) = y_0 \quad (17)$$

Donde $y(n) \in \mathbb{R}^m$ y $g : Z_0^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua en x .

Un punto x^* es llamado punto de equilibrio de (17) si :

$$g(n, x^*) = x^* \quad n \geq n_0$$

Definición 1.6 .- El punto de equilibrio x^* es llamado:

- Estable si dado $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ existe $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$ tal que $\|y_0 - x^*\| < \delta$ implica

$$\|y(n, n_0, y_0) - x^*\| \leq \epsilon$$

Para $n \geq n_0$

- Uniformemente estable si δ es independiente de la elección de n_0
- Atractor si existe $\eta = \eta(n_0)$ tal que si $\|y_0 - x^*\| \leq \eta$ implica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n, n_0, y_0) = x^*$$

- Uniformemente atractor si η no depende de la elección de n_0
- Asintóticamente estable si es estable y atractor
- Asintóticamente uniformemente estable si es uniformemente estable y uniformemente atractor

El siguiente teorema expresa la estabilidad de (14) en términos de su matriz fundamental

Teorema 1.15 .- Consideremos el sistema (14) respecto a la solución nula tenemos

1. Estable si y solo si existe una constante positiva M tal que
 $\|\Phi(n)\| \leq M$
para $n \geq n_0 \geq 0$

2. Uniformemente estable si y solo si existe una constante positiva M tal que
 $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ para $n \geq m \geq n_0$
3. Asintoticamente estable si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$$

4. Uniformemente asintóticamente estable si y solo si existe una constante positiva M y $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que
 $\|\Phi(n, m)\| \leq M\rho^{n-m}$ para $n \geq m \geq n_0$

Prueba. Ver [2]

A continuación damos un simple criterio para poder determinar la estabilidad uniforme y estabilidad asintóticamente uniforme

Teorema 1.16 .- Se tienen los siguientes resultados

- Si

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}(n)| \leq 1$$

Para $1 \leq j \leq m$, $n \geq n_0$ entonces la solución cero de (14) es uniformemente estable .

- Si

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}(n)| \leq 1 - c$$

Con $c \in \langle 0, 1 \rangle$, $1 \leq j \leq m, n \geq n_0$, entonces la solución cero de (14) es uniformemente asintóticamente estable.

Prueba. Ver [2]

Para analizar la estabilidad del sistema no lineal

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{18}$$

en un punto de equilibrio se recurre en muchas ocasiones a una cierta clase de funciones llamadas funciones de liapunov :

Estabilidad segun Liapunov

Sea $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, la variación de V relativa al sistema (18) esta definida por:

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

sobre las soluciones de (18) se tiene:

$$\Delta V(x(n)) = V(f(x(n))) - V(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n))$$

Si $\Delta V(x) \leq 0$ entonces se dice que V es no creciente sobre las soluciones de (18).

Una función $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función de Liapunov para (18) en G si verifica :

i) V es continua sobre G

ii) $\Delta V(x) \leq 0$ siempre que $x, f(x) \in G$

Una función $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada definida positiva en x^* si:

i) $V(x^*) = 0$

ii) $V(x) > 0$ para $x \in B(x^*, \gamma)$ para algun $\gamma > 0$

Teorema 1.17 (Teorema de estabilidad de Lipunov). Si V es una función de liapunov para (18) en un vecindad H del punto de equilibrio x^* y V es definida positiva con respecto a x^* entonces es x^* estable. Si además de esto ocurre que $\Delta V(x) < 0$ siempre que $x, f(x) \in H$ para $x \neq x^*$, entonces x^* es asintóticamente estable. Si en adición a esto se tiene que $G = H = \mathbb{R}^m$ y $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$ entonces x^* es globalmente asintóticamente estable.

Prueba. Ver [2].

Ejemplo 1.9 Considere el siguiente sistema vectorial

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta n) & -\sin(\theta n) \\ \sin(\theta n) & \cos(\theta n) \end{pmatrix} x(n)$$

Sea la función continua : $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y) = x^2 + y^2$ tenemos que sobre las soluciones :

$$\Delta V(x, y) = V(f(x, y)) - V(x, y) = (x \cos(\theta n) - y \sin(\theta n))^2 + (x \sin(\theta n) + y \cos(\theta n))^2 - x^2 - y^2 = 0$$

Puesto que V es definida positiva para $(0, 0)$ se concluye que el origen es estable.

1.3.-La Z-Transformada

La Z-transformada es una herramienta útil en teoría de control en tiempo discreto y su papel es análogo al que juega la transformada de Laplace en tiempo continuo.

La Z-transforma es conveniente para las ecuaciones en diferencias lineales y los sistemas discretos.

La importancia de la Z-Transformada radica en que permite reducir ecuaciones en diferencias o ecuaciones recursivas con coeficientes constantes a ecuaciones algebraicas lineales.

La Z-Transformada es una aplicación entre un espacio de sucesiones (funciones discretas) y un espacio de funciones Analíticas (desarrollables en serie de Laurent).

La función que los liga es la serie de Laurent cuyos coeficientes son los elementos de la sucesión de origen.

Definición 1.7 La Z-Transformada (unilateral) de la sucesión $(x(n))$ esa definida por la función compleja:

$$\tilde{x}(z) = Z(x(n)) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j}$$

Donde z es un numero complejo, el conjunto de valores de z para los cuales la serie converge es llamado región de convergencia.

Sea $a \in \mathbb{C}$ denotemos con $A(a, r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| > r\}$ para $r \geq 0$

Lema 1.3 Sea $(x(n))$ una sucesión de números complejos y $r = \limsup \sqrt[n]{|x(n)|}$ entonces:

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(z - a)^{-n}$ es absolutamente convergente en cada punto de la corona $A(a, r, +\infty)$ y converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $A(a, r, +\infty)$
2. En el disco $D(a, r)$ la serie no convergue.
3. la función f definida en $A(a, r, +\infty)$ por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(z - a)^{-n}$$

es analítica.

Entre todas las propiedades de la Z-Transformada destacamos:

Linealidad

Si $x(z)$ y $y(z)$ representan las Z-Transformada de las sucesiones (x_n) y (y_n) respectivamente con radios de convergencia R_1, R_2 respectivamente, entonces si α y β son números complejos se tiene:

$$Z(\alpha x(n) + \beta y(n)) = \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y}$$

Convolución

La convolución de las sucesiones (x_n) y (y_n) se define como la sucesión:

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^n x(n-i)y(i) = \sum_{i=0}^n x(i)y(n-i)$$

Se tiene que:

$$\widetilde{x * y}(z) = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z)$$

Traslación en el dominio de tiempo

Sea $k > 0$ un número entero y la sucesión $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$, definamos la sucesión $y(n) = x(n-k)$, con $y(-i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ entonces :

$$\tilde{y}(z) = z^{-k}\tilde{x}(z)$$

Si $y(n) = x(n+k)$ entonces

$$\tilde{y}(z) = z^k\tilde{x}(z) - z^k x(0) - z^{k-1}x(1) - z^{k-2}x(2) \dots - zx(k-1)$$

Si $y(n) = a^n x(n)$ con $a \neq 0$ entonces

$$\tilde{y}(z) = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right)$$

Teorema de valor inicial

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{x}(z) = x(0)$$

Teorema del valor final

$$x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\tilde{x}(z)$$

Ejemplo 1.10 Si $x = (a, a, \dots, a, \dots)$ entonces

$$\tilde{x}(z) = \frac{az}{z-1} \text{ con región de convergencia } |z| > 1$$

Ejemplo 1.11 Si $x = (1, 2, 2^2, \dots)$ entonces

$$\tilde{x}(z) = \frac{z}{z-2}, \text{ con región de convergencia } |z| > 2$$

Transformada Z inversa

Es útil obtener transformadas Z inversas de funciones de variable compleja $F(z)$, es decir, sucesiones que verifican:

$$\tilde{x}(z) = Z(x_n) = F(z) \text{ y } (x_n) = Z^{-1}(F(z)).$$

Para calcular la transformada inversa de una función $F(z)$ basta calcular el desarrollo en serie de Laurent centrada en cero de manera que tenga un anillo de convergencia de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ para algun $r \geq 0$

Ejemplo 1.12 Si $F(z) = \frac{1}{z-1}$ entonces desarrollando en serie de Laurent tenemos:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 1$. Entonces la sucesion es: $x(n) = Z^{-1}(\frac{1}{z-1}) = (0, 1, 1, \dots)$.

Observacion La forma usual (no en todos los casos) de la Transformada Z es la siguiente:

$$\tilde{x}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

1.4.-Algunos resultados básicos de análisis funcional y análisis complejo

Definición 1.8 Un conjunto M en un espacio con producto interno X es llamado ortogonal si sus elementos son dos a dos ortogonales, M es llamado ortonormal si:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 1 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

En el caso que M sea numerable podemos escribirlo como una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y podemos llamarla sucesión ortogonal o ortonormal respectivamente. De manera, análoga se puede definir conjunto ortogonal o ortonormal para el caso general $(x_i)_{i \in I}$.

Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es ortogonal entonces se verifica la relación de pitagoras:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

Todo conjunto ortogonal es un conjunto linealmente independiente. (numerable o no numerable)

Si (e_1, e_2, \dots) es una sucesión ortonormal en un espacio con producto interno y si $x \in \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para un n fijo, entonces :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Sea $x \in X$ y sea $y \in Y_n = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ con $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ y sea $z = x - y$ entonces es facil comprobar que: $z \perp y$ luego por la relación de pitagoras tenemos:

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$$

para $n = 1, 2, \dots$ de donde obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Teorema 1.18 (Desigualdad de bessel) Si (e_n) es una sucesion ortonormal en un espacio con producto interno X entonces para todo $x \in X$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Prueba. Ver [10].

Teorema 1.19 (Proceso de gram-schmidt) Dada una sucesión linealmente independiente $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se puede obtener una sucesión ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ que verifica:

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

Prueba. Ver [10].

Dada una sucesión ortonormal (e_n) en un espacio de Hilbert H consideremos la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \tag{19}$$

La serie convergue a $s \in H$ si la sucesión de sumas parciales $(s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$ convergue a s esto es $\|s_n - s\| \rightarrow 0$

Un conjunto ortonormal (e_n) es una base de Hilbert de un espacio de Hilbert X si para todo $x \in X$ existen $l_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} l_i e_i$$

Teorema 1.20 Dada una sucesión ortonormal (e_n) en un espacio de Hilbert H entonces:

1. La serie (19) converge si y solo si la siguiente serie converge:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

2. si la serie en (19) converge a x entonces se tiene que $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$
3. Para todo $x \in H$ se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i < \infty$$

no necesariamente a x .

4. Si $x \in \overline{\text{span}((e_n))}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = x$$

Prueba. Ver [10].

Definición 1.9 Un conjunto total en un espacio normado X es un subconjunto $M \subseteq X$ tal que:

$$\overline{\text{span}(M)} = X$$

En todo espacio de Hilbert no trivial H existe un conjunto ortonormal total.

Teorema 1.21 Sea X un espacio de Hilbert y (e_n) un conjunto ortonormal entonces son equivalente:

1. (e_n) es una base de Hilbert para X

2. (e_n) es un conjunto total ortonormal en X
3. Para todo $x \in X$ se tiene que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$
4. Para todo $x \in X$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$

Prueba. Ver [10].

Teorema 1.23 Sea H un espacio de Hilbert entonces:

1. Si H es separable (posee un subconjunto numerable denso en H) todo conjunto ortonormal en H es numerable
2. Si H contiene una sucesión ortonormal que es total en H entonces H es separable

Prueba. Ver [10].

Teorema 1.24 Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ una región y f una función analítica no idénticamente nula. Denotemos con Z_f el conjunto de ceros de f , i.e

$Z_f = f^{-1}(0)$. Entonces:

- 1) Z_f es un conjunto discreto
- 2) Para cualquier conjunto compacto $K \subseteq A$, $K \cap Z_f$ es finito o vacío.

Prueba. Ver [11].

Teorema 1.25 (Teorema de Laurent) Sea $0 \leq r_1 < r_2$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, consideremos la región $A = \{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, si f es analítica en la región A entonces f se puede representar en la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{(z - z_0)^n}$$

Donde ambas series convergen absolutamente en A y uniformemente en todo corona concéntrica cerrada en A

Si γ es un círculo con centro en z_0 y radio r con $r_1 < r < r_2$ entonces los coeficientes son dados por:

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi \quad n = 1, 2, \dots$$

Prueba. Ver [11].

Definición 1.10 Se llama residuo de f en z_0 al coeficiente b_1 en su desarrollo en serie de Laurent de f en z_0 .

Teorema 1.26 (Teorema de Residuos) Sea A una región y sean $z_1, z_2, \dots, z_n \in A$ n puntos distintos. Sea f analítica en $A - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Sea γ una curva cerrada en A que encierra en su interior los puntos z_i entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i)$$

Prueba. Ver [11].

En lo sucesivo designaremos con \mathbb{Z}_{n_0} el conjunto $\mathbb{Z}_{n_0} = \{n : n \geq n_0\}$

CAPITULO II

2.- ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA

Las ecuaciones en diferencias de Volterra (EDV), pueden ser vistas como una generalización de las ecuaciones en diferencias. Así como en una ecuación en diferencias, la solución de una EDV es una sucesión, con algunos términos iniciales dados; en una EDV en la mayoría de casos, el momento presente depende de él y de todos los términos anteriores. Las (EDV) tienen diversas formas, entre algunas de ellas tenemos:

$$x(n) = \sum_{i=n_0}^n k(n, i)x(i) + g(n) \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (20)$$

Donde $k : \mathbb{Z}_{n_0} \times \mathbb{Z}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{Z}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ esta EDV lineal puede ser considerada el análogo en versión discreta de la ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie:

$$x(t) = \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds + g(t) \quad \text{para } t \geq t_0$$

También :

$$x(n+1) = c(n)x(n) + \sum_{i=n_0}^n k(n, i)x(i) + g(n) \quad (21)$$

Donde $c : \mathbb{Z}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $k : \mathbb{Z}_{n_0} \times \mathbb{Z}_{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ esta ecuación puede ser considerada el análogo en versión discreta de la ecuación integrodiferencial de Volterra:

$$x'(t) = c(t)x(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds + g(t) \quad \text{para } t \geq t_0$$

Esta ecuación es utilizada ampliamente en modelos de dinámica de población ver [16]

También podemos mencionar a las EDV no lineales, suma infinita lineal, de memoria no acotada respectivamente:

$$x(n+1) = g(n, x(n)) + \sum_{i=n_0}^n K(n, i, x(i))$$

$$x(n) = f(n) + \sum_{i=n_0}^{\infty} K(n, i)x(i)$$

$$x(n) = f(n) + \sum_{i=-\infty}^{n_0} K(n, i)x(i)$$

Las dos primeras ecuaciones pueden ser consideradas como casos particulares de la ecuación:

$$x(n+1) = H(n, x(n_0), \dots, x(n)) \quad n \geq n_0 \quad (22)$$

Con $x(n_0)$ dado, donde $H : \mathbb{Z}_{n_0} \times S_{n_0}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y satisface la condición:

$$H(n, (x(n))) = H(n, x(n_0), \dots, x(n), \dots) = H(n, x(n_0), \dots, x(n)) \quad n \geq n_0$$

esto es, $H(n, (x(n)))$ no depende de los terminos $x(j)$ para $j \geq n+1$.

La solución de la ecuación (22) sera denotado con $x(n, n_0, x(n_0))$, cuando no haya posibilidad de confusión lo representaremos simplemente por $x(n)$

Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ es un punto de equilibrio o estacionario de (22) si :

$$H(n, (\bar{x})) = H(n, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x} \quad \text{para toda } n \geq n_0$$

En este trabajo sin pérdida de generalidad consideraremos ecuaciones que tienen como punto de equilibrio a la sucesión constante (0) i.e $H(n, 0, \dots, 0) = 0$ para $n \geq n_0$, caso contrario definimos una ecuación equivalente cuyo punto de equilibrio sea 0 en efecto consideremos :

$$F(n, y(n)) = H(n, \bar{x} - y(n)) - \bar{x}$$

entonces (0) es punto de equilibrio de F .

Para cada $x \in \mathbb{R}^m$, podemos considerar la sucesión constante $(x)_{n \geq n_0}$ y para cada $n \geq n_0$ fijo consideremos la función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f_n(x) = H(n, (x))$ esta observación la utilizaremos en un teorema posterior.

Si la solución de una EDV asociada a cierta condición inicial tiene como solución a una solución constante entonces se dice que dicha condición inicial es un punto de equilibrio(o punto crítico o estacionario) de la EDV y la respectiva solución es una solución de equilibrio de la EDV.

Si para valores iniciales próximos a la solución de equilibrio, las soluciones permanecen próximas a la solución de equilibrio, entonces se dice que esta solución de equilibrio es estable.

Si además, existe una vecindad del punto de equilibrio tales que las soluciones de la EDV con datos iniciales en esa vecindad, dan soluciones que converjan a la solución de equilibrio entonces la solución de equilibrio es asintóticamente estable.

Definición 2.1

Se dice que la sucesión nula de (22) es:

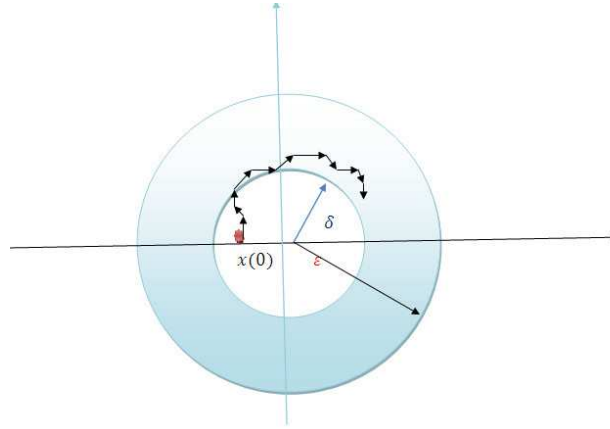
1. Estable si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que,

$$\|x(n_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(n, n_0, x(n_0))\| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Ver figura [1]

2. Asintóticamente estable si es estable y existe un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ conteniendo al origen, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x(n_0)) = 0$, cualquiera sea la condición inicial $x(n_0) \in A$ (atractor). Ver figura [2]

En el caso que $A = \mathbb{R}^m$ diremos que la solución nula tiene estabilidad asintóticamente global.



Estabilidad de la solución nula

Figura 1:

La solución de una ecuación en diferencias, es una sucesión cuyos términos pueden ser obtenidos recursivamente; esta peculiaridad de las ecuaciones en diferencias nos permite usar el computador, para obtener tantos términos

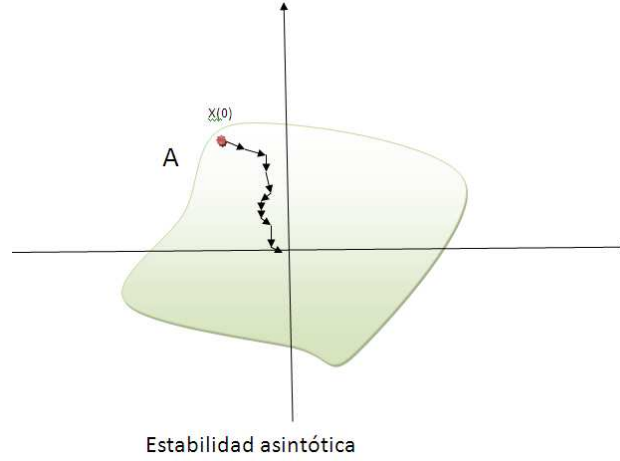


Figura 2:

como queramos de la solución, en muchas aplicaciones esto es suficiente para conseguir la información que deseamos, mas la posibilidad de obtener tantos términos cuanto queramos de la solución no nos da una fórmula para la solución, existen cuestiones de carácter cualitativo que no pueden ser respondidas por el computador, por mas grande que sea el numero de términos obtenidos de la solución.

Para responder a las cuestiones de carácter cualitativo, en esta sección vamos en busca de estas propiedades como: estabilidad, periodicidad y acotaciones.

En esta sección se hace un estudio de algunas EDV con respecto a la estabilidad, acotaciones y la existencia de soluciones periódicas .

Sin perdida de generalidad podemos tomar cuando sea necesario $n_0 = 0$

2.1.-Ecuación en diferencias de Volterra de tipo convolución caso escalar

Consideremos la EDV escalar de tipo convolución de la forma:

$$x(n+1) = cx(n) + \sum_{i=0}^n k(n-i)x(i) \quad c \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Esta ecuación es el análogo en versión discreta de la ecuación integrodiferen-

cial de Volterra de tipo convolución

$$x'(t) = cx(t) + \int_0^t k(t-s)x(s)$$

y un caso particular de la ecuación (21).

Elaydi (ver [2]) usa la Z-transformada para resolver y analizar la estabilidad de la solución nula de (23) de la siguiente manera:

Utilizando la definición de convolución podemos reescribir (23) en la forma:

$$x(n+1) = cx(n) + k(n) * x(n)$$

Aplicando la Z-transformada a ambos miembros de esta ecuación obtenemos:

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = c\tilde{x}(z) + \tilde{k}(z)\tilde{x}(z)$$

entonces despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos

$$\tilde{x}(z) = \frac{zx(0)}{z - c - \tilde{k}(z)} \quad (24)$$

Tomando la Z-transformada inversa a esta ultima ecuación podemos obtener la solución de (23).

Ejemplo 2.1

Consideremos la EDV escalar de tipo convolucion dada por:

$$x(n+1) = x(n) + \sum_{i=0}^n k(n-i)x(i) \quad x(0) = x_0$$

donde: $(k(n)) = (0, 2, 2^2, 2^3, \dots)$

Para $x_0 \neq 0$ tomando la Z-transformada a ambos miembros de esta igualdad y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos :

$$\tilde{x}(z) = \frac{(z-2)x_0}{(z-3)}$$

utilizando fracciones parciales y tomando Z-transformada inversa obtenemos:
 $x(n) = (3^{n-1})x_0$ para $n \geq 1$.

Ejemplo 2.2

Hallar la solución de la EDV dada por:

$$x(n+1) = 1 - \sum_{i=0}^n e^{n-i} x(i) \quad x(0) = x_0$$

Tomando la Z-transformada a ambos miembros de la ecuación y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos:

$$\tilde{x}(z) = \frac{(z-e)(1+x_0(z-1))}{(z-1)(z-e+1)}$$

para $|z| > e$

utilizando fracciones parciales tenemos que:

$$\tilde{x}(z) = \frac{1-e}{(z-1)(2-e)} + \frac{1}{(2-e)(z-e+1)} + \frac{x_0 z}{z-e+1} - \frac{ex_0}{z-e+1}$$

Tomando Z-transformada inversa y por la linealidad obtenemos

$$(x(n)) = (x_0, \frac{1-e}{2-e} + (\frac{1}{2-e}) + x_0(e-1) - ex_0, \frac{1-e}{2-e} + (\frac{1}{2-e})(e-1) + x_0(e-1)^2 - ex_0(e-1),$$

$$\frac{1-e}{2-e} + (\frac{1}{2-e})(e-1)^2 + x_0(e-1)^3 - ex_0(e-1)^2, \dots)$$

de donde deducimos que :

$$x(n) = \frac{1-e}{2-e} + (\frac{1}{2-e} - x_0)(e-1)^{n-1}$$

para $n > 0$

Elydi ([2]) considera la función compleja $g(z) = z - c - \tilde{k}(z)$ dada en (24), esta función es de mucha utilidad al analizar la estabilidad de la solución nula para la ecuación (23).

El siguiente lema proporciona información sobre la localización de ceros de la función g

Lema 2.1

Los ceros de $g(z) = z - c - \tilde{k}(z)$ todos yacen en la región $|z| < A$ para algún $A > 0$. Por otra parte si $(k(n)) \in l^1$ entonces g solo posee una cantidad

finita de ceros que satisfacen $|z| \geq 1$.

Prueba

Supongamos que el conjunto de ceros es no acotado y no vacío, entonces para toda $n \geq 1$, exista z_n cero de g tal que $|z_n| \geq n$ y $|z_n| > |z_{n-1}|$, de este modo se obtiene una sucesión (z_n) de ceros de g que verifican:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$$

por otra parte como z_n es cero de g tenemos que:

$$|z_n - c| = |\tilde{k}(z_n)|$$

Tomando el límite para $n \rightarrow \infty$ a ambos miembros y utilizando el teorema del valor inicial se obtiene $\infty^+ = |k(0)|$ lo cual es una contradicción.

La condición de $k(n) \in l^1$ implica que $\tilde{k}(z)$ converge absolutamente para $|z| > 1$, pues $\tilde{k}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) < \infty$ esto se deduce del teorema de Abel que dice :

Si una serie de potencias converge para un valor z_0 entonces la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z| < |z_0|$

Ahora $\tilde{k}(z)$ converge en alguna región de la forma $|z| > r$ para algún $r \leq 1$ donde es analítica, además como $k(n) \in l^1$ también es analítica para $|z| = 1$, así $g(z)$ es analítica en la región $1 \leq |z| \leq A$ que es compacto y está contenido en su dominio concluimos que solo puede tener una cantidad finita de ceros en dicha región, esto prueba el lema.

Ver figura [3]

Observación La condición $k(n) \in l^1$ puede ser omitida en caso g solo tenga

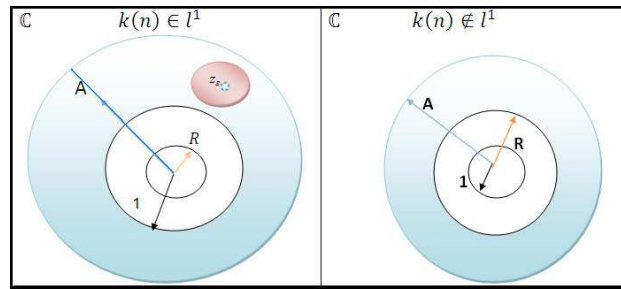


Figura 3:

una cantidad finita de ceros, esto sucede por ejemplo cuando g es una función

racional.

Como $\tilde{x}(z) = x(0)zg^{-1}(z)$ utilizando la formula integral de cauchy se sigue que:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{x}(z) z^{n-1} dz$$

donde γ es un circulo con centro en el origen y que contiene a los ceros de g dicho circulo existe por el lema anterior, luego

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} x(0)g^{-1}(z)z^n dz$$

Por el teorema de los residuos se tiene que:

$$x(n) = x(0) \left(\text{suma de residuos de } g^{-1}(z)z^n \right)$$

Denotemos con $R_s(n)$ el residuo de $z^n g^{-1}(z)$ en z_s cero de g .

Donde z_1, z_2, \dots son los ceros de g

Si z_s es un cero de g de orden k entonces z_s es un polo de orden k de $g^{-1}(z)$.

Desarrollando $z^n g^{-1}(z)$ en serie de Laurent en un entorno punteado de z_s donde g^{-1} sea analítica tenemos

$$g^{-1}(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} g_j(z - z_s)^j$$

Por otro lado

$$z^n = [(z - z_s) - z_s]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z_s^{n-i} (z - z_s)^i$$

Sea $R_s(n)$ el residuo de $z^n g^{-1}(z)$ en z_s entonces $R_s(n)$ =coeficiente de $(z - z_s)^{-1}$ en el desarrollo de $z^n g^{-1}(z)$ en serie de Laurent.

Tenemos que:

$$z^n g^{-1}(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z_s^{n-i} g_j(z - z_s)^{i+j}$$

de donde deducimos que el coeficiente de $(z - z_s)^{-1}$ es:

$g_{-k} \binom{n}{k-1} (z_s)^{n-k+1} + g_{-k+1} \binom{n}{k-2} (z_s)^{n-k+2} \dots + g_{-1} \binom{n}{0} (z_s)^n$ entonces:

$$x(n) = x(0) \sum_s p_s(n) (z_s)^n \quad (25)$$

donde $p_s(n) = g_{-k} \binom{n}{k-1} (z_s)^{-k+1} + g_{-k+1} \binom{n}{k-2} (z_s)^{-k+2} \dots + g_{-1} \binom{n}{0}$
que es un polinomio en n de grado a lo mas $k-1$
Notese que si z_s es un polo de orden 1 entonces $R_s(n) = g_{-1}(z_s)^n$

Ejemplo 2.3

Consideremos la ecuación de tipo convolución de volterra dado por:

$$x(n+1) = \frac{-1}{4}x(n) + \sum_{r=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{r-n} x(r)$$

Tomando z -transformada ambos lados de la ecuación y despejando $x(z)$, tenemos

$$x(z) = \frac{zx(0)}{z + \frac{1}{4} - \frac{z}{z-2}}$$

En este caso tenemos que $g(z) = z + \frac{1}{4} - \frac{z}{z-2}$ y sus raices son $z_1 = \frac{11+\sqrt{153}}{8}$ y $z_2 = \frac{11-\sqrt{153}}{8}$ que son polos simples de $\frac{1}{g(z)}$ calculamos el residuo en el primer polo asi tenemos:

$$g_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{g(z)} = \frac{-5 + \sqrt{153}}{2\sqrt{153}}$$

para el otro polo tenemos

$$g_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{1}{g(z)} = \frac{5 + \sqrt{153}}{2\sqrt{153}}$$

luego la solución es

$$x(n) = x(0) \left(\left(\frac{-5 + \sqrt{153}}{2\sqrt{153}} \right) \left(\frac{11 + \sqrt{153}}{8} \right)^n + \left(\frac{5 + \sqrt{153}}{2\sqrt{153}} \right) \left(\frac{11 - \sqrt{153}}{8} \right)^n \right)$$

La formula (25) posee una importante consecuencia dada por:

Teorema 2.1.- La solución cero de (23) es estable si y solo si las siguientes condiciones ocurren :

- i) $g(z) \neq 0$ para todo $|z| > 1$
- ii) Si z_r es un cero de $g(z)$ de modulo 1 entonces el residuo de $z^n g^{-1}(z)$ en z_r es acotado cuando $n \rightarrow \infty$

Prueba

Notese primero que si $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ entonces para toda $k \in \mathbb{Z}_0^+$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n n^k = 0$$

Se concluye que si $p(n)$ es un polinomio entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n p(n) = 0$$

Primero probaremos la condición necesaria, por i los ceros de g satisfacen $|z| \leq 1$; si z_s es un cero de g de orden k con $|z_s| < 1$ entonces por la observación $R_s(n)$ es acotada, así su contribución a la solución $x(n)$ es acotada, mas aun tiende a 0.

Ahora si $|z_s| = 1$ por la condición ii) los residuos $R_s(n)$ son acotados para $n \rightarrow \infty$ esta contribución a la solución $x(n)$ es acotada, entonces $|x(n)| \leq L|x(0)|$ para algun $L > 0$ es claro que esto implica que la solución nula es estable.

Para la condición suficiente supongamos que exista un z_s cero de g con $|z_s| > 1$ entonces la contribución de este cero ala solución no seria acotada así la solución $x(n)$ no seria estable, en el caso $|z_r| = 1$, para que su contribución a la solución sea acotada tine que suceder que $|R_s(n)| = |p_s(n)|$ sea acotado esto termina la prueba.

Es inmediato ver que si z_s es un cero simple su residuo es acotado.

Corolario 2.1 .- La solución cero de (23) es asintoticamente estable si y solo si:

$$g(z) = z - C - \tilde{K}(z) \neq 0$$

para todo $|z| \geq 1$

Prueba

Primero veamos la condición necesaria; en este caso todos los ceros de g satisfacen $|z_r| < 1$ por el teorema anterior la solución nula es estable ademas cada contribución tiende a cero luego la solución en (23) tiende a cero. La condición suficiente se desprende del teorema anterior.

Ejemplo 2.4 Consideremos la EDV dada por:

$$x(n+1) = 2x(n) - 12 \sum_{i=0}^n (n-i)x(i)$$

con $x(0) = x_0$ tomando z-transformada a ambos miembros de esta ecuación identificamos que $g(z)$ viene dada por :

$$g(z) = \frac{(z+1)(z + (\frac{5+\sqrt{33}}{2}))(z - (\frac{5-\sqrt{33}}{2}))}{(z-1)^2}$$

De donde se observa que g se anula en puntos con $|z| > 1$, luego la solución nula no es asintoticamente estable.

Ejemplo 2.4

Consideremos la EDV dada por:

$$x(n+1) = -x(n) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-i)} x(i)$$

con $x(0) = x_0$ tomando z-transformada a ambos miembros de esta ecuación identificamos que $g(z)$ viene dada por :

$$g(z) = \frac{z^2 - \frac{z}{4} - \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{4}}$$

De donde se observa que g se anula en 0.6404 y -0.3904 luego la solución nula es asintoticamente estable.

Para valores proximos a 0 digamos $x(0) = 0.5$, $x(0) = 0.1$, la solución tiende a 0. Ver figura [4]

Iteración	x(0)=0.5	x(0)=0.1
150	2.7375x10 ⁻³⁰	5.4750x10 ⁻³¹
300	2.5343x10 ⁻⁵⁹	5.0686x10 ⁻⁶⁰

En la práctica hallar los ceros de una función compleja puede ser una tarea muy complicada, y en consecuencia probar la estabilidad se tornaría dificultoso, los siguientes resultados dan condiciones suficientes para la estabilidad sin recurrir a hallar los ceros de la función g .

Criterios explícitos para la estabilidad de la EDV de tipo convolución

Elaydi ver [2] da un resultado que da condiciones mas explicitas sobre la estabilidad de la solución nula para la ecuación (23) enunciando el siguiente teorema:

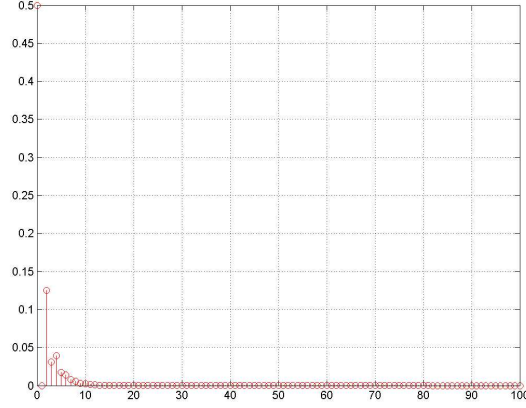


Figura 4: "Solución de la ecuación en diferencias"

Teorema 2.2 .- Supongamos que $k(n)$ no cambia de signo para toda $n \geq 0$ y ademas

$$|c| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} k(n) \right| < 1$$

entonces la solución cero de (23) es asintoticamente estable.

Prueba

Consideremos la sucesión $S(n) = \nu^{-1}k(n)$ donde

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} k(n)$$

entonces se tiene

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} S(n)$$

entonces $\tilde{S}(1) = 1$ y $|\tilde{S}(z)| \leq 1$ si $|z| \geq 1$ puesto que $S(n) > 0$, con esto g puede escribirse en la forma

$$g(z) = z - c - \nu\tilde{S}(z)$$

Para demostrar la estabilidad asintótica de la solución nula de (23) sera suficiente demostrar que g no posee ceros con $|z| \geq 1$.

Supongamos que exista z_0 cero de g que satisface $|z_0| \geq 1$ entonces obtenemos :

$$|z_0 - c| = \left| \nu \tilde{S}(z_0) \right| \leq \nu$$

de esta ultima desigualdad y de la hipotesis se obtiene.

$$|z_0| \leq |c| + |\nu| < 1$$

lo cual es una contradicción esto termina la prueba.

Ejemplo 2.5 Consideremos la EDV:

$$x(n+1) = -\frac{1}{3}x(n) + \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)^2}{4^{n-i}(n-i)!} x(i)$$

Para esta ecuación tenemos : $c = -\frac{1}{4}$, $k(n) = \frac{n^2}{4^n n!}$.Se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i i!} = \left(\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) e^{1/4} = 0.4013$$

luego :

$$\left| -\frac{1}{3} \right| + |0.3596| = 0.7346 < 1$$

luego la solución cero es asintoticamente estable.

La figura [5] muestra el comportamiento de la solución para algunas condiciones iniciales dadas.

Elaydi deja como pregunta abierta si el reciproco es verdadero o falso, el siguiente ejemplo muestra que el reciproco del teorema anterior es falso para esto consideremos la EDV :

$$x(n+1) = -x(n) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{n-i+1}{4^{n-i}} \right) x(i)$$

De donde $c = -1$, $k(n) = \frac{n+1}{4^n}$.

Consideremos

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$$

Por el criterio de la razón es fácil ver esta serie es convergente, puesto que es

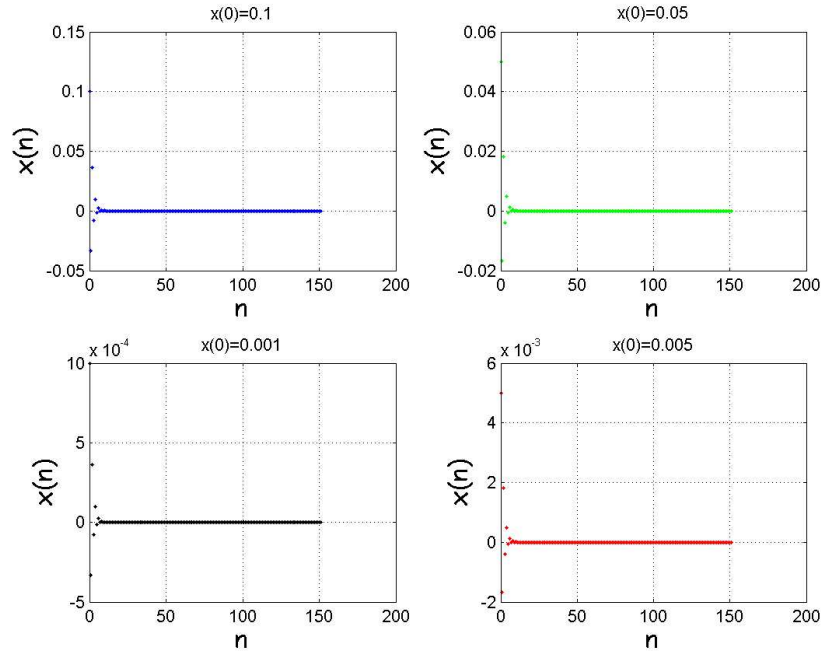


Figura 5: "Solución de la ecuación en diferencias"

una serie de términos no negativos se deduce que $\rho > 0$ luego $|c| + |\rho| > 1$.
 Calculemos por otro lado $\tilde{k}(z)$; por definición:

$$\tilde{k}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{4^i} z^{-i}$$

de donde obtenemos :

$$\tilde{k}(z) = \frac{16z^2}{(4z-1)^2}$$

para $|z| > \frac{1}{4}$
 entonces

$$g(z) = \frac{(z+1)(4z-1)^2 - 16z^2}{(4z-1)^2}$$

Sea

$h(z) = (z+1)(4z-1)^2 - 16z^2$ Se tiene que :

$h(-1) = -16 < 0$, $h(0) = 1 > 0$, $h(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2} < 0$, $h(1) = 2 > 0$ entonces
 existen puntos $z_1 \in \langle -1, 0 \rangle$, $z_2 \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, $z_3 \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ tales que.

$g(z_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, luego $g(z) \neq 0$ para $|z| \geq 1$, en efecto las raices de h son:

$$z_1 = 0.9065 - 0.0000i ; z_2 = -0.5353 - 0.0000i ; z_3 = 0.1288 + 0.0000i$$

El siguiente teorema muestra algunos criterios para la no estabilidad de la solución nula estos criterios se pueden ver como una versión parcial del recíproco del teorema anterior.

Teorema 2.3 Supongamos que $k(n)$ no cambia de signo para toda $n \geq 0$ si una de las siguientes condiciones ocurre :

1. $c + \sum_{n=0}^{\infty} k(n) \geq 1$
2. $c + \sum_{n=0}^{\infty} k(n) \leq -1$ y $k(n) > 0$ para algún $n \geq 0$
3. $c + \sum_{n=0}^{\infty} k(n) < -1$ y $k(n) > 0$ para algún $n \geq 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} k(n)$ es suficientemente pequeño

entonces la solución cero de (23) no es asintoticamente estable

Prueba

Probaremos la parte 1

Consideremos la sucesión $S(n) = \nu^{-1}k(n)$ donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} k(n) = \nu \neq 0$$

entonces se tiene

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} S(n)$$

Si $c + \nu = 1$ entonces $g(1) = 1 - c - \tilde{k}(1) = 1 - c - \nu\tilde{S}(1) = 0$, entonces por el corolario (2.1) la solución nula de (23) no es asintoticamente estable, en el otro caso si $c + \nu > 1$ entonces $c + \nu = 1 + \delta$ para algún $\delta > 0$, se presentan dos casos según el signo de ν .

a) Si $\nu < 0$ entonces $c > 0$, consideremos γ el círculo de centro en c y radio $r = |\nu| + \frac{\delta}{2}$ ver figura (6).

De $c + \nu = 1 + \delta$ se tiene que $c = 1 + \delta + |\nu|$, por otro lado si $z \in \gamma$ entonces $|z - c| = |\nu| + \frac{\delta}{2}$ de donde se tiene que $1 < |z|$ por otro lado $|\nu\tilde{S}(z)| \leq |\nu| < |z - c|$.

Sea $h(z) = \nu \tilde{S}(z)$, $f(z) = z - c$ entonces sobre γ tenemos que $|h(z)| < |f(z)|$ entonces por el teorema de Rouché $f(z)$ y $g(z) = f(z) - h(z) = z - c - \tilde{k}(z)$ poseen el mismo número de ceros en el interior de γ como f posee como cero a $z = c$ entonces existe z_r en el interior de γ para el cual $g(z_r) = 0$ y además $|z_r| > 1$ y por el corolario (2.1) la solución nula de (23) no es asintóticamente estable.

b) Ahora supongamos que $\nu > 0$ como $c + \nu > 1$ se tiene que $g(1) = 1 - c - \nu < 0$ por otra parte; $\left| \tilde{S}(c + \nu) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} S(n)(c + \nu)^{-1} \right| \leq 1$ entonces $g(c + \nu) = c + \nu - c - \tilde{k}(c + \nu) = \nu - \nu \tilde{S}(c + \nu) \geq 0$ y puesto que $g(1) < 0$ entonces existe un $z_r \in (1, c + \nu]$ tal que $g(z_r) = 0$ esto completa la prueba.

Ejemplo 2.6 Consideremos la EDV:

$$x(n+1) = -4x(n) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{4^{n-i}}{(n-i)!} \right) x(i)$$

Para esta ecuación tenemos: $c = -4$, $k(n) = \frac{4^n}{n!}$. Se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{n!} \right) = e^4$$

luego la solución cero no es asintóticamente estable.

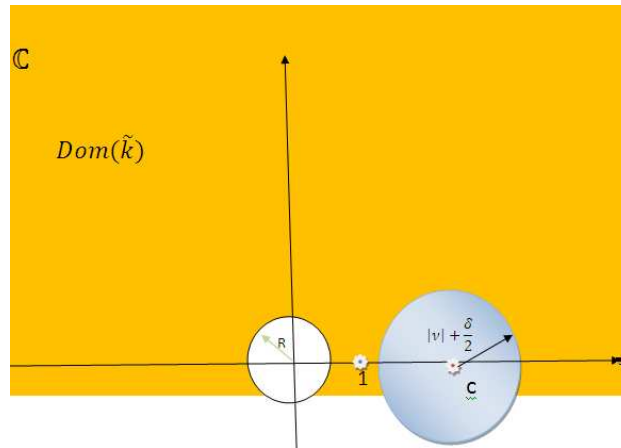


Figura 6:

2.3.-Sistemas de EDV

Consideremos el sistema m -dimensional de tipo convolución:

$$x(n+1) = Cx(n) + \sum_{i=0}^n K(n-i)x(i) \quad (26)$$

Donde $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\{K(n)\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^{m \times m}$ y asumamos $K(n) \in l_1$, ie $\sum_{j=0}^{\infty} |B(j)| < \infty$.

La z -transformada de una sucesión en \mathbb{R}^m y de una sucesión matricial en $\mathbb{R}^{m \times m}$, son definidas como:

$$\tilde{x}(n) = (\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n), \dots, \tilde{x}_p(n))$$

$$\tilde{K}(n) = (\tilde{k}_{ij}(n)) \text{ respectivamente.}$$

Las propiedades de la Z -transformada escalar se extiende com facilidad al caso de vectores y matrices.

Tomando la z -transformada a ambos lados de (26) tenemos :

$$z\tilde{x}(z) - z\tilde{x}(0) = C\tilde{x}(z) + \tilde{k}(z)\tilde{x}(z) \text{ entonces :}$$

$$\tilde{x}(z) = x(0)zg^{-1}(z) \text{ donde } g(z) = zI - C - \tilde{k}(z)$$

Para la ecuacion (26) su matriz resolvente $\Gamma(n)$ se define como la única solución de la ecuación en diferencias matricial:

$$\Gamma(n+1) = C\Gamma(n) + \sum_{i=0}^n K(n-i)\Gamma(i) \quad (27)$$

con $\Gamma(0) = I$

Tomando la z -transformada a la ecuación (27) obtenemos:

$$z\tilde{\Gamma}(z) - z\tilde{\Gamma}(0) = C\tilde{\Gamma}(z) + \tilde{K}(z)\tilde{\Gamma}(z)$$

Despejando $\tilde{\Gamma}(z)$ obtenemos:

$$\tilde{\Gamma}(z) = zG^{-1}(z) \quad |z| > \mu$$

para algun $\mu > 0$.

La matriz resolvente $\Gamma(n)$ y la z -transformada no permiten hallar en forma explicita la solución del sistema perturbado, en efecto consideremos la EDV:

$$y(n+1) = Cy(n) + \sum_{i=0}^n K(n-i)y(i) + g(n)$$

Tomando la z-transformada obtenemos:

$$z\tilde{y}(z) - zy(0) = C\tilde{y}(z) + \tilde{K}(z) * \tilde{y}(z) + \tilde{g}(z)$$

Entonces despejando $\tilde{y}(z)$ obtenemos:

$$\tilde{y}(z) = G^{-1}(z)(zy(0) + \tilde{g}(z)), |z| > \mu$$

$$\tilde{y}(z) = \frac{\tilde{R}(z)}{z}(zy(0) + \tilde{g}(z)), |z| > \mu \text{ reemplazando}$$

$$\tilde{y}(z) = \tilde{\Gamma}(z)y(0) + \frac{\tilde{\Gamma}(z)\tilde{g}(z)}{z}; |z| > \mu$$

Tomando la z-transformada inversa obtenemos:

$$y(n) = \Gamma(n)y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma(n-i-1)g(i) \quad (28)$$

La formula (28) es llamada: formula de variación de parametros del sistema perturbado.

Elaydi da un resultado sobre estabilidad para la ecuación (26) similar al corolario 2.1. Ver [2]

Consideremos el sistema de EDV de tipo no convolución

$$x(n+1) = C(n)x(n) + \sum_{i=0}^n K(n,i)x(i) \quad (29)$$

y el correspondiente sistema perturbado

$$x(n+1) = C(n)x(n) + \sum_{i=0}^n K(n,i)x(i) + g(n) \quad (30)$$

Donde $x(n) \in \mathbb{R}^m$, $C(n)$, $K(n,i)$ son funciones matriciales de orden $m \times m$ definidas en \mathbb{Z}_0 y $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ respectivamente y $g : \mathbb{Z}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$

Se define la matriz resolvente del sistema (29), como la matriz $\Gamma(n,p)$ de orden $m \times m$ que es la única solución de la ecuación en diferencias matricial:

$$\Gamma(n+1,p) = C(n)\Gamma(n,p) + \sum_{i=p}^n K(n,i)\Gamma(i,p) \quad n \geq p$$

con $\Gamma(p,p) = I$, $\Gamma(n,s) = 0$ si $n < s$

Usando la matriz resolvente $\Gamma(n,p)$ podemos establecer la siguiente formula de variación de parámetros

Teorema 2.4 La única solución de la EDV (30) que satisface $x(0) = x_0$ denotada por $x(n, 0, x_0)$ es dada por:

$$x(n, 0, x_0) = \Gamma(n, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma(n, i+1)g(i) \quad (31)$$

Prueba

Mostraremos que la sucesión dada por (31) es solución de (30), tenemos que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \Gamma(n+1, 0)x_0 + \sum_{i=0}^n \Gamma(n+1, i+1)g(i) = \\ &= \left[C(n)\Gamma(n, 0) + \sum_{i=0}^n K(n, i)\Gamma(i, 0) \right] x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left[C(n)\Gamma(n, i+1) + \sum_{\tau=i+1}^n K(n, \tau)\Gamma(\tau, i+1) \right] g(i) + g(n) = \\ &= C(n) \left[\Gamma(n, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma(n, i+1)g(i) \right] + \sum_{i=0}^n K(n, i)\Gamma(i, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\tau=i+1}^n K(n, \tau)\Gamma(\tau, i+1)g(i) + g(n) = \\ &= C(n)x(n) + g(n) + \sum_{i=0}^n K(n, i)\Gamma(i, 0)x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} K(n, n)\Gamma(n, i+1)g(i) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\tau=i+1}^{n-1} K(n, \tau)\Gamma(\tau, i+1)g(i) \end{aligned}$$

utilizando el teorema de Fubini en la doble sumatoria tenemos que:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= C(n)x(n) + g(n) + K(n, n) \sum_{\tau=0}^{n-1} \Gamma(n, \tau+1)g(\tau) + \sum_{i=0}^n K(n, i)\Gamma(i, 0)x_0 + \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\tau=0}^{i-1} K(n, i)\Gamma(i, \tau+1)g(\tau) = \\ &= C(n)x(n) + \sum_{i=0}^n K(n, i) \left[\sum_{\tau=0}^{i-1} K(i, \tau+1) + \Gamma(\tau, 0) \right] + g(n) = \\ &= C(n)x(n) + \sum_{i=0}^n K(n, i)x(i) + g(n) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7 Consideremos el siguiente sistema bidimensional.

$$y(n+1) = Cy(n) + \sum_{i=0}^n K(n, i)y(i) + g(n) \quad y(0) = 0$$

Donde

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, K(n, i) = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallando la matriz resolvente $\Gamma(n)$ obtenemos:

$$\Gamma(n) = \begin{pmatrix} (\sqrt{20}^{n-1}) [(-2 + \sqrt{5}) + (-1)^n(2 + \sqrt{5})] & 0 \\ 0 & (\sqrt{6}^{n-1}) \left[\frac{\sqrt{6}-2}{2} + (-1)^n \frac{\sqrt{6}+2}{2} \right] \end{pmatrix}$$

Luego por la formula de variación de parametros la solución viene dada por:

$$y(n, 0, 0) = \begin{pmatrix} (-2 + \sqrt{5})(\sqrt{20}^n) \left[\frac{(n-1)\frac{1}{\sqrt{20}}^{n+1}}{(1-\sqrt{20})^2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.-Estabilidad vía el método de Lyapunov

Una herramienta auxiliar para estudiar la estabilidad de la EDV (22) es usando funciones $V : \mathbb{Z}_{n_0} \times S_{n_0}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ no negativas que satisfacen $V = (n, (x(n))) = V(n, x(n_0), \dots, x(n), \dots) = V(n, x(n_0), \dots, x(n))$ esto es para cada $n \geq n_0$, V no depende de los terminos $x(j)$ para $j > n$ y $v(n, 0, 0, \dots, 0) = 0$ y en algunos casos $V(n, x(n_0), \dots, x(n), \dots) = V(n, x(n))$. Debido a las analogías entre estas funciones y las funciones de Lyapunov, utilizadas para investigar estabilidad de ecuaciones diferenciales, estas funciones son también llamadas funciones de Lyapunov.

Dada una EDV, sobre cuya solución deseamos obtener alguna información cualitativa, exhibiremos una función V asociada a la EDV, que tenga propiedades convenientes, de tal modo que de la existencia de tal función V podamos inferir algunas propiedades cualitativas de las solución de la EDV.

Exibiremos una función V , mas no construiremos tal función, el problema de encontrar tales funciones auxiliares no son abordados en ese trabajo.

Llamaremos K-función a una función w continua en $[0; \infty)$, no decreciente, con $w(0) = 0$ y $w(x) > 0$, para cada $x > 0$.

El proximo teorema nos da condiciones suficientes para la estabilidad asintotica global de la solución nula de (22) y es el fundamento para los teoremas posteriores, sin perdida de generalidad consideraremos $n_0 = 0$.

Teorema 2.5.- Para que la solución nula de (22) tenga estabilidad asintotica global es suficiente que exista una función $V : Z_0 \times S(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ y dos K-funciones: w_1 y w_2 de modo que las siguientes condiciones sean satisfechas:

- i) $w_1(|x(n)|) \leq V(n, x(0), \dots, x(n))$, para $(x(n)) \in S(\mathbb{R}^m)$
- ii) $V(0; y)$ es continua en $y = 0$ y $V(n, 0, 0, \dots, 0) = 0$ para toda $n \geq 0$
- iii) $\Delta V((x(n))) = V(n+1; x(0), \dots, x(n), x(n+1)) - V(n, x(0), \dots, x(n)) \leq -w_2(|x_n|)$ sobre las soluciones $(x(n))$ de (22).

Prueba

Primero veamos que la solución nula es estable.

Para esto sea $\epsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $|x(0)| < \delta$ implica que $|x(n)| < \epsilon$

Como $\epsilon > 0$ entonces $w_1(\epsilon) > 0$; como $V(0, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $y = 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces $|V(0, y) - V(0, 0)| < w_1(\epsilon)$ ademas como $V(n, 0) = 0$ y V es no negativa entonces $V(0, y) < w_1(\epsilon)$, ahora sea $x(0) \in \mathbb{R}^m$ con $|x(0)| < \delta$ entonces $V(0, x(0)) < w_1(\epsilon)$ de la condicion *iii* se deduce que $V(n; x(0); \dots, x(n)) \leq V(0, x(0)) < w_1(\epsilon)$ para $n \geq 0$ entonces y de la condición *i* deducimos que $w_1(|x(n)|) \leq w_1(\epsilon)$ para $n \geq 0$ como w_1 es no decreciente entonces si $|x(0)| < \delta$ implica $|x(n)| < \epsilon$.

Ahora vamos a probar que la solución nula tiene estabilidad asintoticamente global esto es si $x(0) \in \mathbb{R}^m$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, 0, x(0)) = 0$

Supongamos por el absurdo que existe $x(0) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \neq 0$ entonces existe una subsucesión $(x(n_k))$ de $(x(n))$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que $|x(n_k)| > \epsilon_0$ para $k \geq 0$, como w_2 es no decreciente obtenemos $w_2(|x(n_k)|) \geq w_2(\epsilon_0) > 0$ para $k \geq 0$, por otro lado sobre las soluciones $(x(n))$ de (22) tenemos:

$w_2(|x(n)|) \leq V(n; x(0); \dots, x(n)) - V(n+1; x(0), \dots, x(n), x(n+1))$ tomando la suma ambos miembros de 0 a p tenemos que:

$$\sum_{n=0}^p w_2(|x(n)|) \leq \sum_{n=0}^p [V(n; x(0); \dots, x(n)) - V(n+1, x(0), \dots, x(n), x(n+1))] =$$

$$V(0, x(0)) - V(p+1, x(0), \dots, x(p+1)) \leq V(0, x(0))$$

tomando limite cuando $p \rightarrow \infty$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} w_2(|x(n)|)$ converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} w_2(|x(n)|) = 0$ lo cual es una contradicción con $w_2(|x(n_k)|) \geq w_2(\epsilon_0) > 0$, esto concluye el teorema.

Como una aplicación del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.6.- La solución nula de (23) es globalmente asintoticamente estable si

$$|c| + \sum_{j=0}^{\infty} |k(j)| \leq 1$$

Prueba

Definamos para cada $n \geq 1$ y $x \in S(\mathbb{R}^m)$ el funcional V definido en $\mathbb{Z}_0 \times S(\mathbb{R}^m)$ como:

$$V(n, x) = |x(n)| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k(s-r)| |x(r)|$$

$$V(0, y) = |y|$$

Claramente $V(0, y)$ es continua en $y = 0$, tambien $V(n, 0, 0, 0, \dots) = 0$ para $n \geq 0$ asi la hipotesis *ii* del teorema anterior es satisfecha, la hipotesis *i* del teorema anterior es satisfecha tomando $w_1(y) = y$, veamos la hipotesis *iii*, para esto es suficiente mostrar la existencia de una K-función w_2 tal que $\Delta V(x) = V_{n+1}(x) - V_n(x) \leq -w_2(|x(n)|)$ para toda $n \geq 0$

Si x es solución de (22) se tiene que para $n \geq 1$ fijo arbitrario :

$$\Delta V((x(n))) = \left| cx(n) + \sum_{j=0}^n k(n-j)x(j) \right| + \sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k(s-r)| |x(r)| - |x(n)| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k(s-r)| |x(r)|$$

utilizando la desigualdad triangular en el valor absoluto de la expresión anterior y teniendo en cuenta que

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k(s-r)| |x(r)| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k(s-r)| |x(r)| = \sum_{s=n+1}^{\infty} |k(s-n)| |x(n)| - \sum_{r=0}^{n-1} |k(n-r)| |x(r)|$$

se tiene que:

$$\Delta V((x(n))) \leq \left(|c| + \sum_{j=0}^{\infty} |k(j)| - 1 \right) |x(n)| \quad \text{para toda } n \geq 1$$

Por otro lado de la definicion de V y de la ecuación (23) es inmediato verificar que $V(1, x(0), x(1)) - V(0, x(0)) \leq |x(0)| \left(|c| + \sum_{j=0}^{\infty} |k(j)| - 1 \right)$ entonces

$$\Delta V((x(n))) \leq \left(|c| + \sum_{j=0}^{\infty} |k(j)| - 1 \right) |x(n)| \quad \text{para toda } n \geq 0$$

Entonces tomando $w_2(y) = \left(1 - |c| - \sum_{j=0}^{\infty} |k(j)| \right) y$, se cumple la condición *iii* luego la solución nula es globalmente asintoticamente estable.

Ejemplo 2.8 Consideremos la ecuación en diferencias de volterra dada por

$$x(n+1) = \frac{1}{5}x(n) + \sum_{j=0}^n (n-j+1)(-1/3)^{n-j}x(j)$$

Se tiene que $c = \frac{1}{5}$ y $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(-1/3)^j = 0.5625$, luego por el teorema la solución cero es globalmente asintoticamente estable. La figura (7) muestra las soluciones de esta ecuación para algunas condiciones iniciales.

Iteración	$x(0)=20$	$x(0)=25$	$x(0)=1$	$x(0)=5$
300	4.7611×10^{-60}	5.9514×10^{-60}	2.3806×10^{-61}	1.1903×10^{-60}

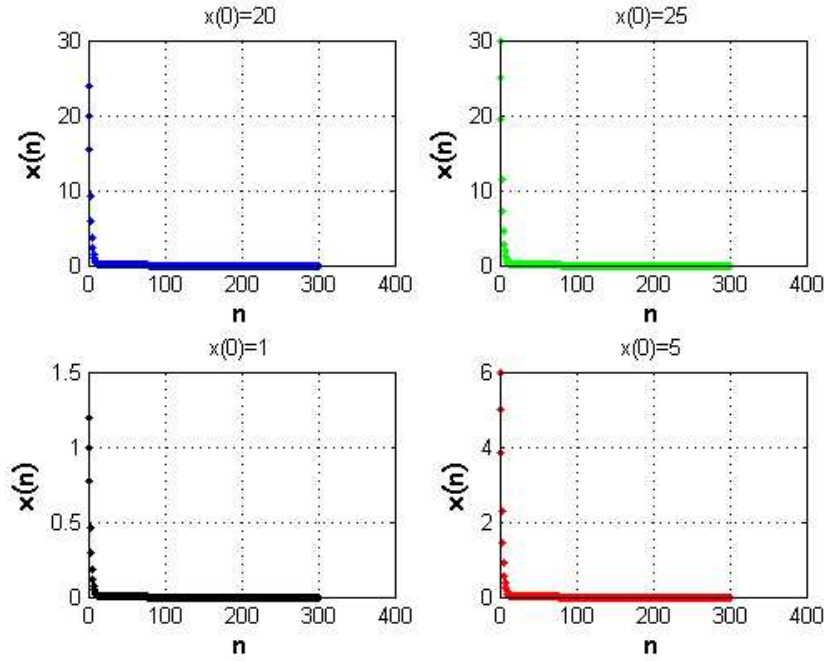


Figura 7:

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes para la estabilidad asintótica global de la ecuación (29) este resultado guarda analogía con el teorema (1.16), consideraremos la norma de la suma.

Teorema 2.7 Asumamos que $\sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| < \infty$ para todo $1 \leq n$, $1 \leq i, j \leq n$ y $0 \leq r \leq n$ y sea $b_{ij}(n) = \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ji}(s, n)|$. La solución cero de

(29) es globalmente asintóticamente estable si al menos una de las siguientes condiciones ocurre:

i)

$$\sum_{j=1}^m (|c_{ji}(n)| + b_{ij}(n)) \leq 1 - c \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq m$$

ii)

$$\sum_{i=1}^m (|c_{ij}(n)| + b_{ji}(n)) \leq 1 - c \quad \text{para toda } 1 \leq j \leq m$$

para algun $c \in \langle 0, 1 \rangle$

Prueba

Suponga que ocurre i definamos para cada $n \geq 1$ y $x \in S(\mathbb{R}^m)$.

$$V(n, x) = \sum_{i=1}^m \left[|x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right] \quad \text{para toda } 1 \leq n$$

$$V(0, y) = c |y|$$

Y tomemos las K-funciones como $w_1(t) = t$ y $w_2(t) = ct$, con esta elección claramente la condición i del teorema (2.5) se verifica, de la definición de V es inmediato ver que se satisface ii, veamos la condición iii, para $x \in S(\mathbb{R}^m)$ solución de (29) se tiene :

$$V_n(x) = \sum_{i=1}^m \left[|x_i(n+1)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right] -$$

$$\sum_{i=1}^m \left[|x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right]$$

ahora de (29) tenemos que:

$$x_i(n+1) = \sum_{j=1}^m c_{ij}(n)x_j(n) + \sum_{r=0}^n \sum_{j=1}^m k_{ij}(n, r)x_j(r) \quad (31)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| &= \sum_{s=n+1}^{\infty} |k_{ij}(s, n)| |x_j(n)| - \sum_{r=0}^{n-1} |k_{ij}(n, r)| |x_j(r)| \\
&= \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, n)| |x_j(n)| - \sum_{r=0}^n |k_{ij}(n, r)| |x_j(r)|
\end{aligned} \tag{32}$$

Utilizando la desigualdad triangular en (31) y sustituyendo esto junto a (32) en $\Delta V_n(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta V(x) &\leq \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m |c_{ij}(n)| |x_j(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, n)| |x_j(n)| \right] = \\
&\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m |c_{ji}(n)| |x_i(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ji}(s, n)| |x_i(n)| \right] = \\
&\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m |c_{ji}(n)| |x_i(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^m b_{ij}(n) |x_i(n)| \right] \\
&= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m (|c_{ji}(n)| + b_{ij}(n)) - 1 \right] |x_i(n)| \leq -c |x(n)| \quad \text{para todo } n \geq 1
\end{aligned}$$

Para $n = 0$ tenemos:

$$V(1, x(0), x(1)) - V(0, x(0)) = |x(1)| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{\infty} |k_{ij}(s, 0)| |x_j(0)| - c |x(0)|$$

utilizando la ecuación para obtener $x(1)$ en terminos de $x(0)$ y utilizando nuevamente la norma de la suma se deduce:

$$V(1, x(0), x(1)) - V(0, x(0)) \leq -c |x(0)|$$

luego

$$\Delta V_n(x) \leq -c |x(n)| = -w_2(|x(n)|) \quad \text{para toda } n \geq 0$$

esto implica que la solución nula de (29) es globalmente asintoticamente estable.

Ejemplo 2.9.-

Consideremos el sistema :

$$x(n+1) = Cx(n) + \sum_{j=0}^n K(n,j)x(j)$$

Donde:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}, \quad K(n,j) = \begin{pmatrix} 0 & 3^{-n+j-1} \\ \frac{1}{4(n-j+1)(n-j+2)} & 5^{-n+j-1} \end{pmatrix}$$

entonces tenemos

$$\sum_{s=n}^{\infty} k_{11}(s,r) = 0, \quad \sum_{s=n}^{\infty} k_{12}(s,r) = \sum_{s=n}^{\infty} 3^{-s+r-1} = 3^{r-1} \sum_{s=n}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^s < \infty$$

,

$$\sum_{s=n}^{\infty} k_{22}(s,r) = \sum_{s=n}^{\infty} 5^{-s+r-1} = 5^{r-1} \sum_{s=n}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^s < \infty$$

$$\sum_{s=n}^{\infty} k_{21}(s,r) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{4(s-r+1)(s-r+2)} = \frac{1}{4} \sum_{s=n}^{\infty} \left(\frac{1}{s-r+1} - \frac{1}{s-r+2} \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{(n-r+1)} < \infty$$

Ahora calcularemos $b_{ij}(n)$

$$b_{11}(n) = 0, \quad b_{22}(n) = \sum_{s=n}^{\infty} |5^{-s+n-1}| = \sum_{s=0}^{\infty} |5^{-s-1}| = \frac{1}{4}$$

$$b_{21}(n) = \sum_{s=n}^{\infty} |3^{-s+n-1}| = \sum_{s=0}^{\infty} |3^{-s-1}| = \frac{1}{2}$$

$$b_{12}(n) = \sum_{s=n}^{\infty} \left| \frac{1}{4(s-n+1)(s-n+2)} \right| = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{4(s+1)(s+2)} = \frac{1}{4}$$

Ahora veamos que se verifica la condición:

$$\sum_{j=1}^2 (|c_{ji}(n)| + b_{ij}) < 1 - c \quad \text{para } i = 1, 2$$

Para $i = 1$

$$|c_{11}(n)| + b_{11} + |c_{21}(n)| + b_{12} = \frac{29}{56} < 1$$

para $i = 2$

$$|c_{12}(n)| + b_{21} + |c_{22}(n)| + b_{22} = \frac{17}{20} < 1$$

luego la solución nula es globalmente asintoticamente estable

Tomando la condición inicial $(4, 6)$ obtenemos la figura (8).

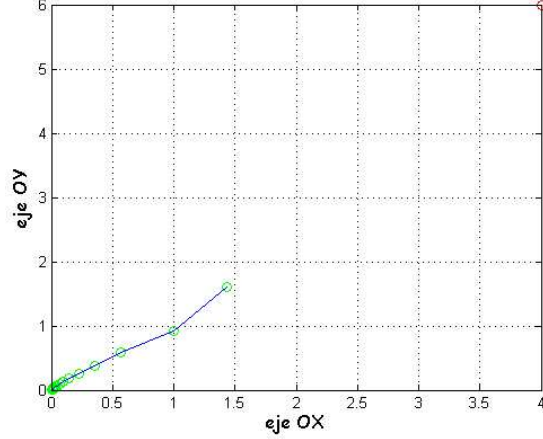


Figura 8: "solucion de la ecuacion en diferencias"

Consideremos la ecuación en diferencias de Volterra dada por:

$$y(n) = g(n) + \sum_{j=0}^n K(n, j)y(j) \quad (33)$$

Donde $g : \mathbb{Z}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $K : \mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ esta ecuación es de importancia pues aparece al discretizar el error al aplicar el método de newton cotes a la solución numerica de una ecuación integral.

La matriz resolvente para la ecuación se define como la matriz $R(m, n)$ que satisface:

$$R(m, n) = I + \sum_{j=m}^n K(n, j)R(m, j)$$

Com $R(n + 1, n) = I$.

Se comprueba facilmente por sustitución directa que la solución de (33) es dado por:

$$y(n) = g(n) - \sum_{j=0}^n (R(j + 1, n) - R(j, n))g(j) \quad n \geq 0 \quad (34)$$

2.4.- Periodicidad de las EDV

Consideremos la EDV lineal:

$$x(n+1) = C(n)x(n) + \sum_{i=0}^n K(n,i)x(i) + g(n) \quad x(0) = x_0 \quad (35)$$

La periodicidad de las soluciones de una EDV es una de las propiedades mas importantes en el estudio cualitativo de las EDV, consideremos la ecuación :

$$z(n+1) = C(n)z(n) + \sum_{i=-\infty}^n K(n,i)z(i) + g(n) \quad (36)$$

notese que la ecuación (35) es un caso particular de (36) con $K(n,i) = 0$ para $i \leq -1$.

En esta sección daremos condiciones suficientes para la existencia de una solución N-periodica para la ecuación (36) i.e $z(n+N) = z(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$, que esta ligada con la existencia de soluciones acotadas de (35).

Asumamos que:

$$H1 \quad \sum_{i=0}^{\infty} |K(n, n-i)| = \sum_{i=-\infty}^n K(n,i) < \infty \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Asumamos tambien que se satisfacen las siguientes condiciones:

$K(n,j) \equiv 0$ para $j > n$, $C(n+N) = C(n)$, $K(n+N, m+M) = K(n,m)$ y $g(n+N) = g(n)$ para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ y para algun entero $N > 0$.

LLamaremos función inicial a una función $\phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{R}^m$

Definición 2.2.- Una solución $z(n, 0, \phi)$ de (36) es una sucesión que satisface (36) para toda $n \geq 0$ y $z(n) = \phi(n)$ para $n \in \mathbb{Z}^-$

Asumiremos que todas las funciones iniciales consideradas son acotadas. De esta forma la existencia y unicidad del problema de valores iniciales para la ecuación (36) es facilmente verificada.

Lema 2.2.- Si $(x(n))$ es una solución acotada de (35) entonces existe una única correspondiente solución $(z(n))$ de (36) tal que para cada $m \in \mathbb{Z}$, $z(m)$ es el limite de alguna subsucesion de $(x(n))$

Prueba

Sea $x(n)$ una solución acotada de (35), consideremos la subsucesion $(x(rN))_{r=0}^{\infty}$ que es acotada entonces existe una subsucesión $(x(r_{i0}N))_{i=0}^{\infty}$ que converge a un punto en \mathbb{R}^m llamemoslo $z(0)$; existe una subsucesión $(r_{i1}N)$ de $(r_{i0}N)$ de tal forma que $(x(1 + r_{i1}N))$ y $(x(-1 + r_{i1}N))$ convergen a los puntos $z(1)$ $z(-1)$ respectivamente de manera inductiva podemos mostrar que para todo entero no negativo n las sucesiones $(x(\pm(n-1) + r_{i(n-1)}N))$ convergen a dos puntos $z(n-1)$ y $z(-(n-1))$ respectivamente y $(x(\pm(n) + r_{i(n)}N))$ converge a $z(n)$ y $z(-n)$ respectivamente donde $\{r_{in}\}$ es una subsucesión de $\{r_{i(n-1)}\}$

Ahora mostraremos que la sucesión $\{z(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ asi definida es solución de (36), notese que esta sucesión es acotada puesto que sus puntos son puntos limites de una sucesión acotada de este modo el segundo miembro de (36) esta bien definido.

En (35) reemplazamos n por $n + r_{i(n+1)}N$ asi tenemos :

$$x(n + 1 + r_{i(n+1)}N) = C(n + r_{i(n+1)}N) x(n + r_{i(n+1)}N) + \sum_{j=0}^{n+r_{i(n+1)}N} K(n + r_{i(n+1)}N, j) x(j) + g(n + r_{i(n+1)}N)$$

Usando las condiciones obtenemos:

$$x(n + 1 + r_{i(n+1)}N) = C(n)x(n + r_{i(n+1)}N) + \sum_{j=-r_{i(n+1)}N}^n K(n, j) x(j + r_{i(n+1)}N) + g(n)$$

Tomando limite a ambos miembros de esta ultima igualdad cuando $i \rightarrow \infty$ y puesto que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_{i(n+1)} = \infty$$

el lado derecho converge a $z(n+1)$ y el lado izquierdo de la igualdad converge a

$$C(n)z(n) + \sum_{j=-\infty}^n K(n, j)z(j) + g(n)$$

Puesto que $\{r_{i(n+1)}\}$ es una subsucesion $\{r_{in}\}$ esto concluye la prueba

A continuación damos un lema sobre la periodicidad de la matriz resolvente

Lema 2.3.- Si $C(n + N) = C(n)$, $K(n + N, m + M) = K(n, m)$ y $g(n + N) = g(n)$ para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ y para algún entero $N > 0$ entonces

$$\Gamma(n + N, m + N) = \Gamma(n, m)$$

Prueba

La prueba se sigue de la definición de matriz resolvente.
Asumamos las siguientes condiciones:

$$H2 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma(m, n) = 0 \quad n \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$H3 \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\Gamma(n, n - i)| < \infty \quad i \in \mathbb{Z}_0 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Con estas hipotesis demostraremos el siguiente lema tecnico que nos servira para el teorema posterior

Lema 2.4.- Con las hipotesis establecidas se tiene:

$$i) \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^{\infty} |K(n, n - r)| = \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=-\infty}^n |K(n, r)| < \infty \text{ y } \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^n |K(n, r)| < \infty$$

$$ii) \text{ Para todo } \epsilon > 0 \text{ existe un numero } r_0 = r_0(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que para toda } n \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ se tiene } \sum_{r=r_0}^{\infty} |K(n, n - r)| = \sum_{r=-\infty}^{n-r_0} |K(n, r)| < \epsilon$$

$$iii) \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^{\infty} |\Gamma(n, n - r)| = \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=-\infty}^n |\Gamma(n, r)| < \infty \text{ y } \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^n |\Gamma(n, r)| < \infty$$

$$iv) \text{ Para todo } \epsilon > 0 \text{ existe un numero } r_0 = r_0(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que para toda } n \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ se tiene } \sum_{r=r_0}^{\infty} |\Gamma(n, n - r)| = \sum_{r=-\infty}^{n-r_0} |\Gamma(n, r)| < \epsilon$$

Prueba

Probemos *i* y *ii*

Para cada $n \geq 0$, se tiene $n = s + lN$ donde $0 \leq s \leq N - 1$, $l \in \mathbb{Z}^+$ como $K(n, m) = K(n + N, m + N)$ para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ se tiene $|K(n, n - r)| = |K(s + lN, s + lN - r)| = |K(s, s - r)|$ entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^{\infty} |K(n, n - r)| = \max_{0 \leq s \leq N-1} \sum_{r=0}^{\infty} |K(s, s - r)|$$

Veamos *ii*

Sea $\epsilon > 0$ y $0 \leq s \leq N - 1$ se sigue de $H1$ que existe un $r_0 = r_0(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+$ tal que para toda s se tiene que $\sum_{r=r_0}^{\infty} |K(s, s-r)| < \epsilon$ por otra parte para cada $n \geq 0$, $n = s + lN$ donde $0 \leq s \leq N - 1, l \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\sum_{r=r_0}^{\infty} |K(n, n-r)| = \sum_{r=r_0}^{\infty} |K(s, s-r)| < \epsilon$$

Teorema 2.8.- Supongamos valida $H1$, $H2$ y $H2$, entonces (36) posee una única solución N -periódica dada por :

$$z(n) = \sum_{m=-\infty}^n \Gamma(n, m+1)g(m)$$

Prueba

Usando la formula de variación de parametros (31) y la parte iii del lema tecnico las soluciones de (35) son acotadas, luego por el lema anterior existe una sucesión $(z(n))$ con la propiedad de que para cada n ; $z(n)$ es el limite se una subsucesión $(x(n + r_{in}N))$, de $(x(n))$, en la formula de variación de parametros (31) substituyendo n por $n + r_{in}N$ obtenemos :

$$\begin{aligned} x(n + r_{in}N) &= \Gamma(n + r_{in}N, 0)x_0 + \sum_{m=0}^{n+r_{in}N-1} \Gamma(n + r_{in}N, m+1)g(m) = \\ x(n + r_{in}N) &= \Gamma(n + r_{in}N, 0)x_0 + \sum_{m=-r_{in}N}^{n-1} \Gamma(n + r_{in}N, m+r_{in}N+1)g(m+r_{in}N) = \\ x(n + r_{in}N) &= \Gamma(n + r_{in}N, 0)x_0 + \sum_{m=-r_{in}N}^{n-1} \Gamma(n, m+1)g(m) \end{aligned}$$

Tomando el limite para $i \rightarrow \infty$ obtenemos

$$z(n) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} \Gamma(n, m+1)g(m)$$

De esta igualdad es inmediato observar que $z(n)$ es N -periódica

Ahora restar mostrar que $z(n)$ es la única solución N -periodica .

Por el absurdo supongamos que exista otra solución N-periodica $\hat{z}(n)$, consideremos la sucesión $\varphi(n) = z(n) - \hat{z}(n)$ es claro ver que esta sucesión es tambien periodica y por lo tanto acotada y satisface la ecuación:

$$\varphi(n+1) = C(n)\varphi(n) + \sum_{i=0}^n K(n,i)\varphi(i) + \sum_{i=-\infty}^{-1} K(n,i)\varphi(i)$$

Por la formula de variacion de parametros la solucion vine dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \Gamma(n,0)\varphi(0) + \sum_{r=0}^{n-1} \Gamma(n,r+1) \left[\sum_{j=-\infty}^{-1} K(r,j)\varphi(j) \right] = \\ &\Gamma(n,0)\varphi(0) + \sum_{r=0}^{n-1} \Gamma(n,r+1) \left[\sum_{j=r+1}^{\infty} K(r,r-j)\varphi(r-j) \right] \end{aligned}$$

luego

$$|\varphi(n)| \leq |\Gamma(n,0)| |\varphi(0)| + B \sum_{r=0}^{n-1} |\Gamma(n,r+1)| \cdot \sum_{j=r+1}^{\infty} |K(r,r-j)|$$

Donde $B = \sup \{|\varphi(n)| : n \in \mathbb{Z}\}$, el primer miembro de la parte derecha converge a 0 veamos que el segundo miembro convergue a 0 por la parte i del lema tecnico se tiene $\sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^{\infty} |K(n,n-r)| = C$, Ahora por la parte ii del lema tecnico se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe un $r_0(\epsilon) \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $\sum_{r=r_0}^{\infty} |K(n,n-r)| < \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{Z}_0^+$, asi para $n > r_0$

$$\begin{aligned} B \sum_{r=0}^{n-1} |\Gamma(n,r+1)| \cdot \sum_{j=r+1}^{\infty} |K(r,r-j)| &= B \sum_{r=0}^{r_0-1} |\Gamma(n,r+1)| \cdot \sum_{j=r+1}^{\infty} |K(r,r-j)| + \\ &B \sum_{r=r_0}^{n-1} |\Gamma(n,r+1)| \cdot \sum_{j=r+1}^{\infty} |K(r,r-j)| \leq BC \sum_{r=0}^{r_0-1} |\Gamma(n,r+1)| + \\ &B \sum_{r=r_0}^{n-1} |\Gamma(n,r+1)| \cdot \sum_{j=r_0+1}^{\infty} |K(r,r-j)| \end{aligned}$$

Por la hipotesis $H2$ tenemos que $\sum_{r=0}^{r_0-1} |\Gamma(n, r+1)| < \epsilon$ para $n > r_1$, tambien por la parte iii del lema tecnico $\sup_{n \in \mathbb{Z}_0^+} \sum_{r=0}^n |\Gamma(n, r)| = T < \infty$, asi para $n > \max\{r_0, r_1\}$ se tiene que

$$B \sum_{r=0}^{n-1} |\Gamma(n, r+1)| \cdot \sum_{j=r+1}^{\infty} |K(r, r-j)| < BC\epsilon + BT\epsilon$$

Asi obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = 0$$

como $\varphi(n)$ es periódica se deduce que es identicamente nula entonces $z(n) = \hat{z}(n)$

2.5.-Acotaciones de las EDV

Una propiedad importante es la acotación de las soluciones de las EDV, de hecho el error entre los valores aproximados por medio de un método de cuadratura y los valores exactos de soluciones de ecuaciones integrales satisfacen una ecuación discreta de volterra que define el error global para el método y sirve para verificar la estabilidad del método.

Definición 2.3

Consideremos la ecuación $x(n+1) = H(n, x(n_0), \dots, x(n))$ para $n \geq n_0$ y $x(n_0) = x_0$ diremos que la ecuación es :

- i) Acotada si para toda $n_0 \in \mathbb{Z}_0$ y $r > 0$ existe un numero $\alpha(n_0, r)$ tal que $|x(n) - x(n, n_0, x_0)| < \alpha(n_0, r)$ para toda $n \geq n_0$ y $|x_0| \leq r$
- ii) Uniformemente acotada con respecto al momento inicial n_0 si $\alpha(n_0, r) = \alpha(r)$ esto es si la constante de acotación no depende del momento inicial n_0 .

De la definición es inmediato verificar que acotación uniforme implica acotacion; el siguiente ejemplo muestra que lo contrario no siempre es verdadero:

Consideremos la EDV bidimensional dada por :

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} & 0 \\ \frac{(n+1)^2}{n+2} & 1 \end{pmatrix} x(n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n+1)^2} \end{pmatrix} x_0$$

Donde $x_0 = x(n_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$. Por la formula de variación de parametros la

solución de (35) viene dada por:

$$x(n) = R(n, n_0)x(0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} R(n, i+1)g(i)$$

$$R(n, n_0)x(0) + \sum_{i=n_0+1}^n R(n, i)g(i-1)$$

Ahora calculamos $R(n, n_0)$ hallando la solución de la respectiva ecuación homogénea; si escribimos $x(n) = \begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix}$ la ecuación homogénea viene

dada por: $x^1(n+1) = x^1(n)\frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}$ y $x^2(n+1) = x^2(n) + x^1(n)\frac{(n+1)^2}{n+2}$

Utilizando el teorema (1.14) obtenemos que:

$$x^1(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{(i+1)^3}{(i+2)^3} x_{01} = \frac{(n_0+1)^3}{n+1} x_{01}$$

luego:

$x^2(n+1) = x^2(n) + \frac{(n_0+1)^3}{(n+2)(n+1)} x_{01}$ con $x^2(n_0) = x_{02}$ por la formula de variación de parametros para esta ultima ecuación y teniendo en cuenta que $R(n, n_0) = I$ tenemos que:

$$x^2(n) = x_{02} + x_{01} \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{(n_0+1)^3}{(i+2)(i+1)}$$

De donde obtenemos .

$x^2(n) = x_{02} + \left[(n_0+1)^2 - \frac{(n_0+1)^3}{n+1} \right] x_{01}$ Luego la solución del sistema homogéneo viene dado por:

$$x(n) = \begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)^3} & 0 \\ (n_0+1)^2 - \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

Luego por unicidad tenemos que:

$$R(n, n_0) = \begin{pmatrix} \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)^3} & 0 \\ (n_0+1)^2 - \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}, R(n_0, n_0) = I$$

luego:

$$x(n, n_0, x_0) = \begin{pmatrix} \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)^3} & 0 \\ (n_0+1)^2 - \frac{(n_0+1)^3}{(n+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \sum_{i=n_0+1}^n R(n, i)g(i-1)$$

Veamos que $x(n)$ es acotada en efecto:

Puesto que las suceciones componente de $R(n, n_0)$ son acotadas en n existe $M(n_0) > 0$ tal que $\|R(n, n_0)\| \leq M(n_0)$ para toda $n \geq n_0$; por otro lado:

$$\sum_{i=n_0+1}^n R(n, i)g(i-1) = \sum_{i=n_0}^n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_{01}}{i^2} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\left| \sum_{i=n_0+1}^n R(n, i)g(i-1) \right| \leq \pi^2 x_{01}$$

luego el lado derecho se puede acotar por:

$M(n_0)|x(0)| + \pi^2|x_{01}|$ luego si $|x_0| \leq r$ podemos tomar $\alpha(n_0, r) = r(M(n_0) + \pi^2)$, esto prueba que es acotada, mas la componente $R_{21}(n, n_0)$ no es acotada en n_0 en efecto si $p \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} R_{21}(pn_0, n_0) = \infty^+$ luego no es uniformemente acotada.

El siguiente teorema muestra que para el caso particular de la ecuación lineal homogenea.

$$y(n+1) = \sum_{i=n_0}^n K(n, i)y(i) \quad n \geq n_0 \quad (37)$$

estabilidad es equivalente a acotación.

Teorema 2.9.- Para la EDV lineal homogénea (37), una condición necesaria y suficiente para ser acotada (uniformemente acotada) es la estabilidad (estabilidad uniforme) respectivamente.

Prueba

Asumamos que es estable entonces por definición de estabilidad, dado $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $\delta(\epsilon, n_0) > 0$ tal que para toda y_0 con $\|y_0\| < \delta(\epsilon, n_0)$ implica $\|y(n, n_0, y_0)\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$; notemos que para toda $c > 0$ se tiene que:

$$y(n, n_0, cy_0) = cy(n, n_0, y_0).$$

Tomemos un $\epsilon > 0$ fijo correspondientemente un $\delta(\epsilon, n_0) > 0$ y tomemos un r arbitrario nosotros tenemos que probar lo siguiente que existe un $\alpha(n_0, r) > 0$ tal que $\|y(n, n_0, y_0)\| < \alpha(n_0, r)$ para toda $n \geq n_0$ y $\|y_0\| \leq r$. Tomemos $\alpha(n_0, r) = \frac{r\epsilon}{\delta(\epsilon, n_0)} > 0$ entonces si $\|y_0\| \leq r$ entonces $\frac{\epsilon}{\alpha} \|y_0\| =$

$\left\| \frac{\epsilon y_0}{\alpha} \right\| < \delta(\epsilon, n_0)$ entonces $\left\| y(n, n_0, \frac{\epsilon y_0}{\alpha}) \right\| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, por la observación anterior

$\left\| \frac{\epsilon}{\alpha} y(n, n_0, y_0) \right\| < \epsilon$ de donde se tiene que $|y(n, n_0, y_0)| < \alpha(n_0, r)$ para todo $n \geq n_0$

Supongamos ahora que el sistema es acotado entonces se tiene dado $\epsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ existe un $\alpha(n_0, \epsilon) > 0$ tal que $\|R(n, n_0)\| \leq \alpha(n_0, \epsilon)/\epsilon$ (esto se deduce de la fórmula de variación de parámetros y de la definición de norma de matrices) para todo $n \geq n_0$ y siempre que $\|x(n_0)\| < \epsilon$. Sea $\delta = \epsilon^2/\alpha(n_0, \epsilon)$ si $x(n_0) \in B[0, \delta]$ se tiene:

$|x(n, n_0, x_0)| = |R(n, n_0)x(n_0)| \leq \frac{\alpha(n_0, \epsilon)}{\epsilon} |x(n_0)| < \epsilon$ esto significa la condición de estabilidad.

El uso de funcionales de Lyapunov nos permite también obtener resultados para la acotación de soluciones de las EDV.

Teorema 2.10 Para que el sistema $x(n+1) = H(n, x(n_0), \dots, x(n))$, $n \geq n_0$ sea acotado es suficiente que existan una función V y una K-función w tal que:

- i) $V(n, x(n_0), \dots, x(n)) \geq w(|x(n)|)$ para todo $x(n) \in \mathbb{R}^m$, $n \geq n_0$
- ii) $\Delta V(n, x(n_0), \dots, x(n)) \leq 0$ sobre las soluciones de la EDV
- iii) $\lim_{y \rightarrow \infty} w(y) = \infty$
- iv) $V(n_0, \cdot)$ es una función que lleva conjuntos limitados de \mathbb{R}^m en conjuntos limitados de \mathbb{R}

Prueba

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$, y $r > 0$ y un valor inicial $x(n_0)$ satisfaciendo $|x(n_0)| < r$ debemos de mostrar que existe $\alpha(n_0, r) > 0$ tal que $|x(n)| \leq \alpha(n_0, r)$ para toda $n \geq n_0$ donde $x(n) = x(n, n_0, x(n_0))$. De la hipótesis ii y luego i deducimos que: $w(|x(n)|) \leq V(n_0, x(n_0))$ para $n \geq n_0$ por iv tenemos que existe $\alpha(n_0, r)$ tal que $V(n_0, x(n_0)) < w(\alpha(n_0, r))$ luego $w(|x(n)|) < w(\alpha(n_0, r))$ entonces $|x(n)| \leq \alpha(n_0, r)$ para $n \geq n_0$

En el siguiente teorema, le agregamos una condición más al teorema anterior, para poder lograr acotación uniforme.

Teorema 2.11 En las condiciones del teorema anterior si además existe una K-función w_1 tal que $V(n_0, x(n_0)) \leq w_1(|x(n_0)|)$ entonces la solución de la EDV es uniformemente limitado.

Prueba

Sea $r > 0$ y $x(n_0) \in \mathbb{R}$ con $|x(n_0)| < r$ debemos de probar que existe $\alpha = \alpha(r) > 0$ tal que $|x(n)| \leq \alpha$ para todo $n \geq n_0$ donde $x(n) =$

$x(n, n_0, x(n_0))$ como w_1 es no decreciente entonces como $|x(n_0)| < r$ entonces $w_1(|x(n_0)|) < w_1(r)$ como $\lim_{y \rightarrow \infty} w(y) = \infty$ entonces existe $\alpha(r) > 0$ tal que $w(\alpha) > w_1(r)$ de manera análoga al teorema anterior tenemos que $w(|x(n)|) \leq V(n_0, x(n_0)) \leq w_1(|x(n_0)|) < w(\alpha)$ para $n \geq n_0$ entonces se tiene $|x(n)| \leq \alpha$.

Ahora damos un nuevo teorema para acotación de las soluciones de la EDV que es consecuencia de los teoremas anteriores.

Teorema 2.12 Consideremos el sistema en \mathbb{R}^m

$$x(n+1) = \sum_{i=0}^n K(n, i)x(i) + g(n) \quad (38)$$

para $n \geq n_0$
 si $2|g(n+1)| \leq |g(n)|$ para $n \geq n_0$ y si

$$\sum_{i=0}^m b_{ji}(n) \leq 1$$

para $1 \leq j \leq m$
 entonces la soluciones son acotadas

Prueba

Definamos el funcional de Lyapunov dado por

$$V(n, x) = \sum_{i=1}^m \left[|x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right] + |g(n-1)| \quad n \geq n_0+1$$

y $V(n_0, y) = |y| + 2|g(n_0)|$

y sea $w(y) = y$

Claramente se cumple i,iii,iv , veamos que ocurre ii

Para x solución de (38):

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x) &= \sum_{i=1}^m \left[|x_i(n+1)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=n_0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right] - \\ &\sum_{i=1}^m \left[|x_i(n)| + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| \right] + |g(n)| - |g(n-1)| \end{aligned}$$

de (38) tenemos que:

$$x_i(n+1) = \sum_{r=n_0}^n \sum_{j=1}^m k_{ij}(n, r) x_j(r) + g_i(n) \quad (39)$$

por otro lado

$$\sum_{r=n_0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| - \sum_{r=n_0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, r)| |x_j(r)| = \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ij}(s, n)| |x_j(n)| - \sum_{r=n_0}^n |k_{ij}(n, r)| |x_j(r)| \quad (40)$$

utilizando la desigualdad triangular en (39) y sutituyendo esto y (40) en $V_n(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &\leq \sum_{i=1}^d \left[|g_i(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^d \sum_{s=n}^{\infty} |k_{ji}(s, n)| |x_j(n)| \right] + |g(n)| - |g(n-1)| = 2|g(n)| - \\ &|g(n-1)| + \sum_{i=1}^d \left[-|x_i(n)| + \sum_{j=1}^d b_{ji}(n) |x_i(n)| \right] = \sum_{i=1}^d \left[\sum_{j=1}^d b_{ji}(n) - 1 \right] |x_i(n)| + 2|g(n)| - |g(n-1)| \end{aligned}$$

entonces:

$$\Delta V_n(x) \leq 0$$

para $n \geq n_0 + 1$, ahora para $n = n_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} V(n_0+1, x(n_0), x(n_0+1)) - V(n_0, x(n_0+1)) &= |x(n_0+1)| + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{s=n_0+1}^{\infty} |k_{ij}(s, n_0)| |x_j(n_0)| \\ &+ |g(n_0)| - |x(n_0)| - 2g(n_0) = \\ &|k(n_0, n_0)x(n_0)| + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{s=n_0+1}^{\infty} |k_{ij}(s, n_0)| |x_j(n_0)| - |x(n_0)| = \\ &|k(n_0, n_0)x(n_0)| + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |x_j(n_0)| \left[\sum_{s=n_0}^{\infty} |k_{ij}(s, n_0)| - |k_{ij}(n_0, n_0)| \right] - |x(n_0)| = \\ &\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |x_j(n_0)| b_{ij}(n_0) - |x(n_0)| = \sum_{j=1}^k |x_j(n_0)| \left[\sum_{i=1}^k b_{ji}(n_0) - 1 \right] \leq 0 \end{aligned}$$

Luego el teorema esta probado.

Ejemplo 2.10

Consideremos : $g(n) = (\frac{1}{3^n}, \frac{2}{5^n})$ y $K(n) = \begin{pmatrix} 4^{-n-1} & 0 \\ \frac{1}{(n+1)n} & 5^{-n-1} \end{pmatrix}$ con

$$K_{21}(0) = -1/2$$

entonces tenemos

$$b_{12} = 0 ;$$

$$b_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} |3^{-n-1}| = \frac{1}{2}$$

$$b_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)n} \right| = \frac{1}{2}$$

$$b_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} |5^{-n-1}| = \frac{1}{4}$$

verificando la condición:

$$\sum_{j=1}^2 [b_{ij}] \leq 1$$

para $i = 1, 2$

Para $i = 1$

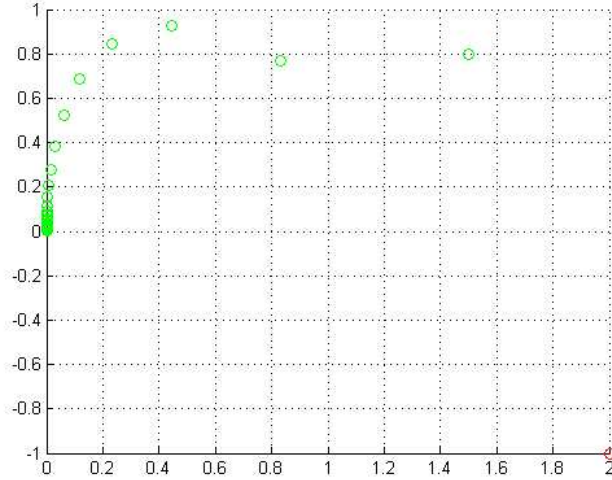
$$b_{11} + b_{12} < 1$$

para $i = 2$

$$b_{21} + b_{22} < 1$$

luego la solución es acotada.

El siguiente grafico muestra la solución con condición inicial $(2, -1)$, para 100 valores.



2.6.- Una aplicación a la epidemiología

Con $x(n)$ denotemos la fracción de individuos susceptibles de una cierta población después de n días de haberse iniciado una epidemia. Sea $a(k) > 0$ la fracción de individuos infectados durante los k primeros días, Kocic, V.L., and G.Ladas dan un modelo de la dinámica de la epidemia dada por la ecuación:

$$\ln\left(\frac{1}{x(n+1)}\right) = \sum_{j=0}^n a(j)(1 + \epsilon - x(n-j))$$

con $x(0) = 1$ y $\epsilon > 0$ pequeño

Notese que $x(n) \in [0, 1]$ $n \geq 0$

Podemos transformar esta ecuación en una ecuación tipo volterra, haciendo $x(n) = e^{-y(n)}$, sustituyendo esto en la ecuación y utilizando propiedades de sumatorias obtenemos:

$$y(n+1) = \sum_{j=0}^n (1 + \epsilon - e^{-y(j)})a(n-j)$$

Como $x(n) \in [0, 1]$ $n \geq 0$ entonces $y(n) \geq 0$

Puesto que durante los primeros días de la epidemia $x(n)$ es próximo a 1 (casi toda la población susceptible $x(n) \leq 1$) y por lo tanto $y(n)$ es muy cercano a 0, así se puede proponer una relación lineal alrededor del cero :

$x(n) \approx 1 - y(n)$ Asi podemos sustituir $e^{-y(j)}$ por $1 - y(j)$ asi obtenemos :

$$y(n+1) = \sum_{j=0}^n (\epsilon + y(j))a(n-j)$$

con $y(0) = 0$, es una ecuación escalar de tipo convolución

Tomando la z-transformada a ambos miembros de esta ultima ecuación y despejando $\tilde{y}(z)$ obtenemos

$$\tilde{y}(z) = \frac{\tilde{a}(z)\epsilon z}{(z-1)(z-\tilde{a}(z))}$$

dependiendo de la forma de $\tilde{a}(z)$ el calculo de $y(n)$ se hace mas simple.

Por ejemplo si suponemos $a(n) = ca^n$ entonces tenemos $\tilde{a}(z) = \frac{cz}{z-a}$ entonces

$$\tilde{y}(z) = \frac{\epsilon cz}{(z-1)(z-(a+c))} = \frac{\epsilon c}{1-a-c} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{a+c}{z-(a+c)} \right]$$

Tomando la transformada inversa tenemos:

$$y(n) = \frac{\epsilon c}{1-(a+c)} [1 - (a+c)^n]$$

Si $a+c < 1$ entonces $\lim y(n) = \frac{\epsilon c}{1-(a+c)}$ asi la epidemia no alcanzara proporciones epidemicas.

CAPITULO III

1.- DISCRETIZACION DE LAS EIV

Consideremos la ecuación integral de volterra de segunda especie :

$$f(t) = g(t) + \int_{t_0}^t k(t, s, f(s))ds \quad t \in [t_0; T] \quad (42)$$

T finito, bajo las condiciones del teorema (1.5).

3.1.- Métodos de Newton Cotes

Consideremos una partición del intervalo $[t_0, T]$, con los nodos $t_l = t_0 + lh$, $h = (T - t_0)/N$, $l = 0, 1, 2, \dots, N$, hagamos $t = t_n$ en (42), la aplicación de un método de cuadratura como las de Newton Cotes aplicado a la integral, de la ecuación integral (42) nos conduce a una ecuación para F_n , aproximación a $f(t_n)$ dada por:

$$F_n = g_n + h \sum_{l=0}^n w_{n,l} k(t_n, t_l, F_l) \quad N \geq n \geq n_0 \quad (43)$$

Donde $n_0 \in \mathbb{N}$, $F_0, F_1, \dots, F_{n_0-1}$, son dados, $g_n = g(t_n)$, y $w_{n,l}$ son los pesos del método de cuadratura aplicado.

Si $\sum_{l=0}^n w_{n,l} \leq M$ para todo $n_0 \leq n \leq N$ la ecuación (43) posee una única solución F_n siempre que $Mh < \frac{1}{L}$, en efecto:

Consideremos el espacio metrico $X = (\mathbb{R}, ||)$ y consideremos para cada $n \geq n_0$ la aplicación T_n de X en X definida como:

$$T_n(x) = g_n + h \sum_{l=0}^n w_{n,l} k(t_n, t_l, x)$$

si $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$|T_n(x) - T_n(y)| = |h \sum_{l=0}^n w_{n,l} (k(t_n, t_l, x) - k(t_n, t_l, y))| \leq h \sum_{l=0}^n |w_{n,l}| L |x - y| \leq hML |x - y|$$

Asi de la condición $Mh < \frac{1}{L}$, T_n es una contracción y luego existe una única solución F_n para cada $n_0 \leq n \leq N$

La regla del Trapecio

Supongamos que para un tamaño de paso $h > 0$ conocemos el valor de la solución en los puntos t_i para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, una aproximación a $f(t_n)$ dada por F_n puede ser calculada con la ecuación (43) usando los valores del integrando en los puntos t_i para $i = 0, 1, \dots, n-1$ y resolviendo esta ecuación para F_n .

Por ejemplo aplicando la regla trapezoidal al integrando en (43) obtenemos:

$$F_n = g(t_n) + h \left\{ \frac{1}{2}k(t_n, t_0, F_0) + \sum_{i=1}^{n-1} k(t_n, t_i, F_i) + \frac{1}{2}k(t_n, t_n, F_n) \right\} \quad (44)$$

Con $F_0 = g(t_0)$ para $n_0 \leq n \leq N$. En el caso lineal se puede despejar F_n de (44) y calcularlo de manera explícita.

Método de Simpson

El uso de las formulas de Newton Cotes introducen algunas restricciones puesto que cada regla envuelve alguna restricción sobre el numero de nodos .

Por ejemplo para usar la regla de simpson 1/3 necesitamos un numero par de intervalos, mientras que para la regla de simpson 3/8 necesitamos que el numero de intervalos sea un multiplo de 3.

Podemos combinar 2 de estas tres reglas de cuadraturas basicas y asi poder tener una ecuación para F_n de la forma (43) para un n cualquiera.

Por ejemplo podemos usar la regla del trapecio para n impar y simpson para n par; por otro lado si combinamos la regla de Simpson 1/3 y 3/8 los pesos en (43) son los siguientes:

Si n es par tenemos los pesos:

$$\begin{aligned} w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3} \\ w_{n,2i} &= \frac{2}{3} \text{ para } i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ w_{n,2i+1} &= \frac{4}{3} \text{ para } i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

Si n es impar tenemos los pesos:

$$\begin{aligned} w_{n,0} &= \frac{3}{8} \\ w_{n,1} &= w_{n,2} = \frac{9}{8} \\ w_{n,3} &= \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n,3} \\ w_{n,2i} &= \frac{4}{3} \text{ para } i = 2, 3, \dots, (n-1)/2 \\ w_{n,2i+1} &= \frac{2}{3} \text{ para } i = 2, 3, \dots, (n-3)/2 \\ w_{n,n} &= \frac{1}{3} \text{ para } n \geq 5 \end{aligned}$$

Utilizando esta fusión de las reglas de simpson 1/3 y 3/8 obtenemos la ecuación para F_n

Asi para n par se tiene:

$$F_n = g_n + \frac{1}{3}h \left\{ k(t_n, t_0, F_0) + 2 \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} k(t_n, t_{2l}, F_{2l}) + 4 \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} k(t_n, t_{2l+1}, F_{2l+1}) + k(t_n, t_n, F_n) \right\}$$

Mientras que para $n \geq 5$ impar tenemos:

$$F_n = g_n + h \left[\frac{3}{8}k(t_n, t_0, F_0) + \frac{9}{8}k(t_n, t_1, F_1) + \frac{9}{8}k(t_n, t_2, F_2) + \frac{17}{24}k(t_n, t_3, F_3) + \frac{4}{3} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} k(t_n, t_{2l}, F_{2l}) \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \sum_{l=2}^{\frac{n-3}{2}} k(t_n, t_{2l+1}, F_{2l+1}) + \frac{1}{3}k(t_n, t_n, F_n) \right]$$

Donde F_0 y F_1 son dados, en el caso que solo se de F_0 , F_1 puede ser calculado utilizando la regla del trapecio

Ejemplos numéricos

Ejemplo 3.1

Consideremos la siguiente ecuación integral:

$$f(t) = \exp(-t) + 2t + \int_0^t e^{s-t} f(s) ds \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1$$

cuya solución exacta es : $f(t) = t^2 + 2t + 1$

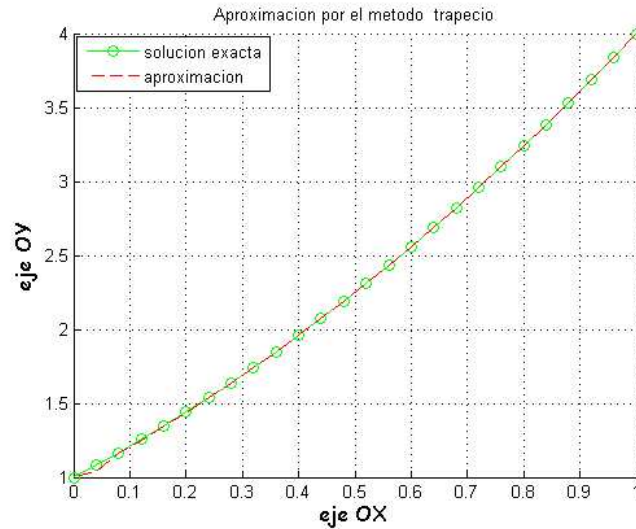


Figura 9: "Ejemplo 3.1:Aproximación por el método del trapecio:"

La tabla siguiente muestra el error en algunos nodos para diferentes tamaño

de paso h .

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	0.10974540	0.00241087	0.00059481
0.2	0.00923953	0.00224578	0.00055354
0.3	0.00852535	0.00206734	0.00050893
0.4	0.00775601	0.00187514	0.00046089
0.5	0.00692984	0.00166876	0.00040931
0.6	0.00604518	0.00144779	0.00035408
0.7	0.00510034	0.00121181	0.00029510
0.8	0.00409365	0.00096040	0.00023226
0.9	0.00302343	0.00069315	0.00016547
1.0	0.00188802	0.00040963	0.00009461

Ejemplo 3.2

Consideremos la siguiente ecuación integral:

$$f(t) = 1 + \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2$$

Cuya solución exacta es $f(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$

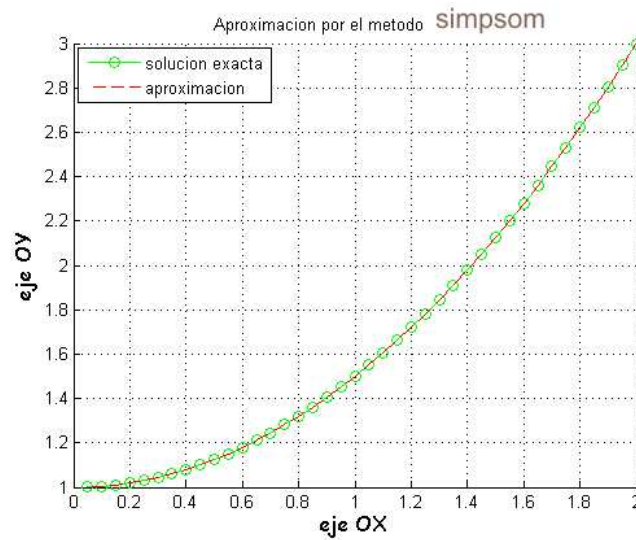


Figura 10: "Ejemplo 3.2:Aproximación por el método simpson"

La tabla siguiente muestra el error en algunos nodos para diferentes tamaño de paso h .

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.2	0.00013307	0.00000012	0.00000001
0.4	0.00000777	0.00000038	0.00000001
0.6	0.00001566	0.00000065	0.00000003
0.8	0.00002392	0.00000096	0.00000004
1.0	0.00004356	0.00000129	0.00000005
1.2	0.00004166	0.00000164	0.00000007
1.4	0.00007104	0.00000202	0.00000008
1.6	0.00006148	0.00000242	0.00000010
1.8	0.00009652	0.00000283	0.00000011
2.0	0.00008330	0.00000325	0.00000013

Ejemplo 3.3

Consideremos la siguiente ecuación integral:

$$f(t) = 1 - t - \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t-s)f(s)ds \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Cuya solución exacta es : $f(t) = 1 - \sinh(t)$

La tabla siguiente muestra el error en algunos nodos para diferentes tamaño de paso h .

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.10000000	0.10516675	0.00017092	0.00051427
0.30000000	0.00238354	0.00086224	0.00196555
0.50000000	0.00487236	0.00158461	0.00370449
0.70000000	0.00757985	0.00236424	0.00599226
0.90000000	0.01062586	0.00322970	0.00918176
1.10000000	0.01414339	0.00421315	0.00000000
1.30000000	0.01828376	0.00535161	0.00000000
1.50000000	0.02322257	0.00668855	0.00000000
1.70000000	0.02916658	0.00827558	0.00000000
1.90000000	0.03636197	0.01017462	0.00000000

De los ejemplos anteriores nos preguntamos si al elevar el orden de integración para aproximar la integral en (43) conduce a una mejor aproximación F_n .

En las líneas siguientes demostraremos que esta conjetura es cierta bajo ciertas condiciones.

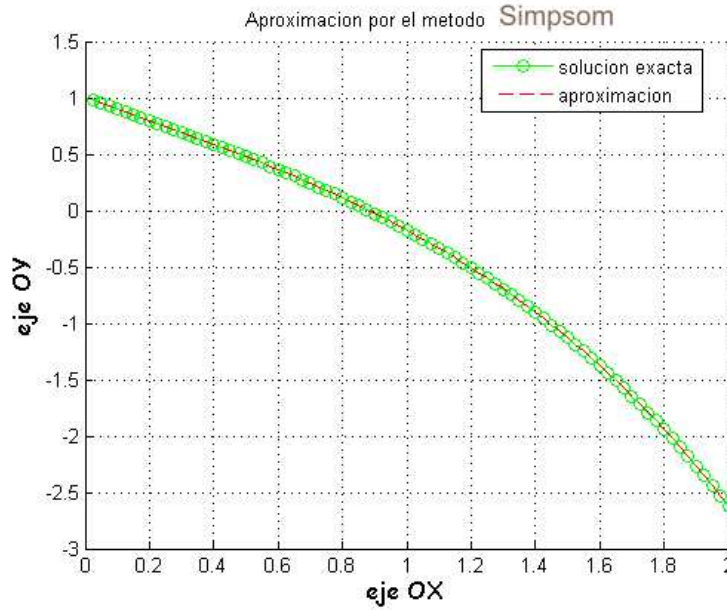


Figura 11: "Ejemplo 3.3:Aproximación por el método 1/3+3/8 de simpson"

Análisis del error. Convergencia de la solución aproximada

El método numérico obtenido al usar una regla de cuadratura de la forma (43) determina una solución aproximada con un posible error en los puntos de discretización t_i .

Para estudiar estos errores consideraremos el conjunto de valores :

$$\xi_i = F_i - f(t_i) \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

El cual llamaremos la discretización del error.

Nuestro interés radica en el comportamiento de estos errores de discretización como función del tamaño de paso h .

Para ciertos $h > 0$ el intervalo $[0, T]$ es dividido exactamente en N partes enteras de tal modo que $Nh = T$. Es evidente que si $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow N \rightarrow \infty^+$, los valores de h que satisfagan: $h \leq T$ y $N = \frac{T}{h}$ sea entero, los llamaremos valores admisibles.

En lo sucesivo denotaremos con \lim_h para indicar $\lim_{h \rightarrow 0}$ para h tomando solo valores admisibles.

Definición 3.1

Un método de la forma (43) es llamado un método de aproximación con-

vergente (Para una ecuación o clase de ecuaciones de la forma (42)) si:

$$\lim_h \left(\max_{0 \leq i \leq N} |\xi_i| \right) = 0$$

Definición 3.2

Si para todo valor admisible de h , existe un numero finito M independiente de h tal que

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\xi_i| \leq Mh^p$$

y si p es el entero positivo mas grande para el cual esta desigualdad ocurre entonces p es llamado el orden de convergencia del método.

Definición 3.3

Sea f la solución de (42) entonces la función :

$$\delta(h, t_n) = \int_0^{t_n} k(t_n, s, f(s))ds - h \sum_{i=0}^n w_{n,i} k(t_n, t_i, f(t_i))$$

se denomina el error de consistencia local para (43)

El error de consistencia local es una medida de la forma en que la regla de integración usada representa a la integral de la ecuación integral en cada iteración.

Definición 3.4

Si para alguna clase de ecuaciones de la forma (42) digamos Λ se tiene que para todo elemento de Λ :

$$\lim_h \max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| = 0$$

entonces el método de aproximación es llamado consistente para la clase de ecuaciones en Λ .

Definición 3.5

Si para toda ecuación en Λ existe una constante M independiente de h y que depende generalmente de k y f tal que :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| \leq Mh^p$$

y p es el entero positivo mas grande para el cual esta desigualdad ocurre entonces el método es llamado consistente de orden p para la clase de ecuaciones Λ .

Para poder estudiar la convergencia del metodo numerico (43), probamos el siguiente teorema técnico respecto a sucesiones.

Teorema 3.1 Consideremos la sucesion $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots$ que satisface :

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n$$

para $n = r, r+1, \dots$ donde $A > 0$, $|B_n| \leq B$, $\sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| \leq \eta$ entonces

$$|\xi_n| \leq (1+A)^{n-r}(A\eta + B)$$

para $n = r, r+1, \dots$

Prueba

Probaremos esta proposición por inducción generalizada:

Para $h = r$ esto es valido, en efecto de la hipotesis se deduce que:

$$|\xi_r| \leq A \sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| + B_r \leq A\eta + B$$

Supongamos valido para $h = n \geq r$ y veamos que es valido para $h = n+1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\xi_{n+1}| &\leq A \sum_{i=0}^n |\xi_i| + B_{n+1} \leq A \sum_{i=0}^n |\xi_i| + B \leq A \left(\sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| + |\xi_r| + |\xi_{r+1}| \dots + |\xi_n| \right) + B \\ &\leq A(\eta + (A\eta + B) + (A\eta + B)(1+A) + (A\eta + B)(1+A)^2 + \dots + (A\eta + B)(1+A)^{n-r}) + B = \\ &A(\eta + (A\eta + B)(1 + (1+A) + (1+A)^2 + \dots + (1+A)^{n-r})) + B = \\ &A(\eta + (A\eta + B)\left(\frac{(1+A)^{n+1-r} - 1}{A}\right)) + B = (1+A)^{n+1-r}(A\eta + B) \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.

Observacion: se puede deducir que $|\xi_n| \leq (A\eta + B)e^{An}$, en efecto se tiene que si $x \geq 0$ entonces $1+x \leq e^x$ entonces se tiene que

$$1+A \leq e^A$$

y para $n \geq r$ se tiene que:

$$(1+A)^{n-r} \leq e^{An}$$

multiplicando por $(A\eta + B)$ obtenemos el resultado.

Ahora enunciaremos un resultado importante sobre la convergencia respecto a los métodos de la forma (43) que resulta una aplicación del teorema anterior. Por simplicidad asumiremos en algunos casos $t_0 = 0$

Teorema 3.2 Consideremos la solución aproximada de (42) dada por (43) y asumamos que:

i) La solución $f(t)$ de (42) y el núcleo $k(s, t, u)$ son tales que el método de aproximación (43) es consistente de orden p con (42)

ii) Los pesos son acotados es decir:

$$\sup_{n,i} |w_{n,i}| \leq W$$

iii) Los errores iniciales $F_i - f(t_i) = \xi_i$, $i = 0, 1, \dots, r-1$ tienden a cero cuando $h \rightarrow 0$, como r está fijado, de acuerdo al método establecido esto implica que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| = 0$$

entonces; el método es un método de aproximación convergente, y en ausencia de errores iniciales el orden de convergencia es por lo menos p .

Prueba

Haciendo $t = t_n$ en (42) resulta:

$$f(t_n) = g(t_n) + \int_0^{t_n} k(t_n, s, f(s)) ds$$

donde $0 \leq t_n \leq T$, sustrayendo esta igualdad de (43) miembro a miembro se obtiene:

$$\xi_n = h \sum_{i=0}^n w_{n,i} \{k(t_n, t_i, F_i) - k(t_n, t_i, f(t_i))\} - \delta(h, t_n) \quad (45)$$

para $n = r, r+1, \dots$ donde

$$\delta(h, t_n) = \int_0^{t_n} k(t_n, s, f(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_{n,i} k(t_n, t_i, F_i)$$

con esto obtenemos

$$|\xi_n| \leq h \sum_{i=0}^n |w_{n,i}| |k(t_n, t_i, F_i) - k(t_n, t_i, f(t_i))| + |\delta(h, t_n)|$$

Usando la condición de Lipchitz para k , la condición *ii* y eligiendo $0 < h < \frac{1}{LW}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |\xi_n| &\leq hL \sum_{i=0}^n |w_{n,i}| |\xi_i| + |\delta(h, t_n)| = hLW \sum_{i=0}^n |\xi_i| + |\delta(h, t_n)| \\ &= hWL \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + hWL |\xi_n| + |\delta(h, t_n)| \end{aligned}$$

entonces:

$$|\xi_n| \leq \frac{hWL}{(1-hWL)} \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + \frac{|\delta(h, t_n)|}{(1-hWL)}$$

para $n = r, r+1, \dots$

Ahora aplicamos el teorema (3.1) con

$$0 < A = \frac{hWL}{1-hWL}, B_n = \frac{|\delta(h, t_n)|}{1-hWL}$$

Primero veamos que existe $B > 0$ tal que

$$|B_n| \leq B \text{ para } n = 0, \dots, N$$

Por i el método de aproximación es consistente de orden p con (42) entonces existe $C > 0$ (no dependiente de h , por lo general depende de k y g) tal que:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| \leq Ch^p$$

entonces $\frac{|\delta(h, t_n)|}{1-hWL} \leq \frac{Ch^p}{1-hWL}$ de esto se tiene la existencia de B . Por otro lado por hipótesis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{r-1} |F_i - f(t_i)| = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| = 0$$

Sea $\eta > 0$ entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $|h| < \delta_1$ entonces $\sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| \leq \eta$

Sea $0 < h \leq \min \left\{ \delta_1, \frac{1}{WL} \right\}$

entonces por la observación del teorema (3.1)

Tomando $A = \frac{hWL}{(1-hWL)}, B = \frac{Ch^p}{1-hWL}$ se tiene

$$|\xi_n| \leq \left(\frac{Ch^p}{1-hWL} + \eta \frac{hWL}{(1-hWL)} \right) e^{\frac{hWL}{(1-hWL)} n}$$

puesto que $hn = t_n \leq L$ tenemos que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\xi_n| \leq (Ch^p + \eta \frac{hWL}{(1-hWL)}) e^{\frac{WL^2}{(1-hWL)}} \quad (46)$$

tomando limite $h \rightarrow 0$ a esta ultima desigualdad obtenemos:

$$\lim_h \max_{0 \leq n \leq N} |\xi_n| = 0$$

Si no existen errores iniciales podemos considerar $\eta = 0$ en ese caso de (46) se observa que el orden es al menos p .

El uso principal de este resultado está en la información cualitativa que lleva.

Esto nos da algún entendimiento profundo inicial en la efectividad esperada de los métodos de la forma (43); tratar de acotar el error en (45) puede no ser muy facil y provechoso, pues se requeriria conocer algunas propiedades de la función $f(t)$ o del nucleo, demás aun si ξ_n puede ser acotado los resultados pueden ser no tan buenos, podriamos obtener varios órdenes de magnitud mayor que el error real.

Ejemplo 3.4

El método del trapecio dado en (44) es un método de aproximación convergente de orden 2 desde que f y k son suficientemente diferenciables; en efecto: Para cada $n = 1, 2, \dots, N$ los pesos vienen dados por:

$w_{n0} = \frac{1}{2}, w_{ni} = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $w_{nn} = \frac{1}{2}$ luego se cumple las hipótesis *ii* del teorema.

Para $r = 1$ el error inicial es cero puesto que $f(t_0) = g(t_0) = F_0$, luego se cumple *iii*

Para verificar la hipótesis *i* del teorema podemos definir para cada $n \geq 1$ la función $y_n(s) = k(t_n, s, f(s))$ y utilizar el teorema :

Si y'' es continua en $[a; b]$, si T es el valor de la regla trapezoidal a $y(t)$ en ese intervalo con una partición uniformemente espaciada, h , entonces existe ξ en $[a; b]$ tal que

$$I - T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

Tenemos que el error de discretización viene dado por:

$$\delta(h, t_n) = \int_0^{t_n} y_n(s) ds - h \left\{ \frac{1}{2} y_n(t_0) + \sum_{i=1}^n y_n(t_i) + \frac{1}{2} y_n(t_n) \right\}$$

asi existe un $\xi_n \in [0; t_n]$ tal que

$$\delta(h, t_n) = -\frac{t_n}{12} h^2 f''(\xi_n)$$

para $n = 1, 2, \dots, N$ entonces tomando $C = \max_{x \in [0, L]} |f''(x)|$ si $f''(\xi_n)$ obtenemos ;

$$|\delta(h, t_n)| \leq Ch^2$$

notese que C depende de f luego el método es consistente de orden 2; luego por el teorema el método es convergente de orden 2.

De igual forma se puede probar que el método simpson $1/3 + 3/8$ son consistentes de orden 4 en consecuencia, en ausencia de errores iniciales el método es convergente de orden 4.

3.3.- Acotación del método directo de cuadratura

Los métodos de newton cotes aplicados a la ecuación integral (42) para el caso lineal nos proporciona en la ecuación (45) una ecuación en diferencias de Volterra para el error, dada por

$$e_n = h \sum_{i=0}^n w_{n,i} k(t_n, t_i) e_i - \delta(h, t_n) \quad n \geq n_0 \quad (47)$$

En esta sección daremos una condición suficiente para obtener una cota para el error dado por las formulas de newton cotes.

Asumamos que $|\delta(h, t_n)| \leq T$ para $n \geq n_0$.

La ecuación (47) se puede reescribir en la forma

$$e_n = h \sum_{i=n_0}^n a_{n,i} e_i - g(n) \quad n \geq n_0 \geq 1 \quad (48)$$

Donde $g(n) = -\delta(h, t_n) + \sum_{i=0}^{n_0-1} w_{n,i} k(t_n, t_i) e_i$ y $a_{n,i} = w_{n,i} k(t_n, t_i)$ y tomemos $g(n) \leq \hat{g}$ para toda $n \geq n_0$

Teorema 3.3.- Asumamos en (42) para el caso lineal que:

- i) $k(t, s) \leq 0, t \geq t_0, t_0 \leq s \leq t$
- ii) $\frac{\partial k(t, s)}{\partial t} \geq 0, t \geq t_0, t_0 \leq s \leq t$
- iii) $|k(t, s)| \leq \phi(t)$
- iv) $\phi'(t) \leq 0$
- v) $\int_{t_0}^{\infty} \phi(t) dt = l^* < \infty$
- vi) $h\phi(t_0) \leq c_1 \leq 1$

Entonces el error global del método de cuadratura directo satisface para $n \geq n_0$:

$$|e_n| \leq \hat{g}(1 + 2l^*)$$

Prueba Consideremos los pesos dados por el método del trapecio, de manera análoga se puede probar para los demas casos en este caso tenemos que:

$$a_{n,i} = \begin{cases} hk_{n,i} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{h}{2}k_{n,n} & \text{si } i = n \end{cases}$$

Sea t_i fijo; por hipotesis $\frac{\partial k(t,s)}{\partial t} \geq 0$, asi si $t_{n+1} \geq t_n$ para $n \geq 0$ se tiene $k_{n+1,i} \geq k_{n,i}$ tomando $i = n$ tenemos $hk_{n+1,n} \geq hk_{n,n}$ entonces $-hk_{n+1,n} \leq -hk_{n,n}$ entonces $|hk_{n+1,n}| \leq |hk_{n,n}|$ luego $|a_{n+1,n}| \leq h|k_{n,n}|$ de esto y de v se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{j+1,j}| \leq h \sum_{j=1}^{\infty} |k_{j,j}| \leq \int_{t_0}^{\infty} \phi(t) dt = l^*$$

ahora veamos que $\frac{h}{2}|k_{n,n}| < 1$ en efecto como $\phi'(t) \leq 0$ entonces ϕ es no creciente entonces $\phi(t) \leq \phi(t_0)$, de *iii* tenemos que $|k_{n,n}| \leq \phi(t_n) \leq \phi(t_0)$ entonces $\frac{h}{2}|k_{n,n}| \leq \frac{h}{2}\phi(t_0) \leq 1$ asi se tiene que

$$hk_{n+1,n} - \frac{h}{2}k_{n,n} \geq \frac{h}{2}k_{n,n} > -1$$

entonces

$$a_{n+1,n} - a_{n,n} \geq -1$$

Aplicando el teorema (2.2) en [13] tenemos que la matriz fundamental satisface la siguiente relación:

$$\sum_{m=1}^n |R(m+1, n) - R(m, n)| \leq 2l^*$$

De (35) tenemos :

$$e(n) = g(n) - \sum_{j=n_0}^n (R(j+1, n) - R(j, n))g(j)$$

Para $n \geq n_0$ aplicando la desigualdad triangular a esta ultima ecuación tenemos:

$$|e_n| \leq \hat{g}(1 + 2l^*)$$

Ejemplo 3.5

Consideremos la ecuación integral

$$f(t) = t^2(1 + \frac{\pi}{8}) - t + 1 - \frac{t^2}{2} \arctg(\frac{1}{t}) + \int_1^t \frac{f(s)}{t^2 + s^2} ds \quad 1 \leq t \leq 3$$

El nucleo es $k(t, s) = \frac{1}{t^2 + s^2}$, $t_0 = 1$ y tomemos $\phi(t) = t^{-2}$ todas la condiciones del teorema anterior son satisfechas con $l^* = \frac{1}{2}$, la solucion exacta de esta ecuación es $f(t) = t^2$ por otro lado tenemos que $|\delta(h, t_n)| \leq \frac{1}{2}h^2$ y tomando $n_0 = 1$ se tiene para toda $0 < h < 1$ que

$$|e_n| \leq \frac{1}{2}h^2(2) = h^2 \quad n \geq n_0$$

Ejemplo 3.6

En [15] Dorian-Boris Pougaza presentan un modelo demográfico estable determinista en tiempo continuo, lo cual se plasma en una ecuación integral de tipo convolución

$$k(t) = \int_0^t k(x)g(t-x)dx + H(t)$$

Sólo se incluye a las mujeres en este modelo, esta ecuación es conocida como un modelo demográfico básico de un solo sexo de Lotka. Donde $k(t)$ representa el numero de nacimientos de mujeres.

La teoría demográfica estable, es un método indirecto de estimación demográfica, lo cual hace uso de información parcial y suposiciones razonables.

Un ejemplo tipico del uso de este método es el de deducir la mortalidad en poblaciones donde los nacimientos y las muertes no son muy bien registradas.

El modela los datos usando una curva de distribución de Pearson, en este caso considera para el caso del proceso de nacimiento:

$g(t) = H(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$. La solución exacta se halla facilmente utilizando los argumentos dados en el capitulo 1, asi se tiene:

$$k(t) = \frac{1}{3} - e^{-\frac{3}{2}t} \left[\frac{1}{3} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \right]$$

Espectativa del número de Nacimiento por hembra cada mes

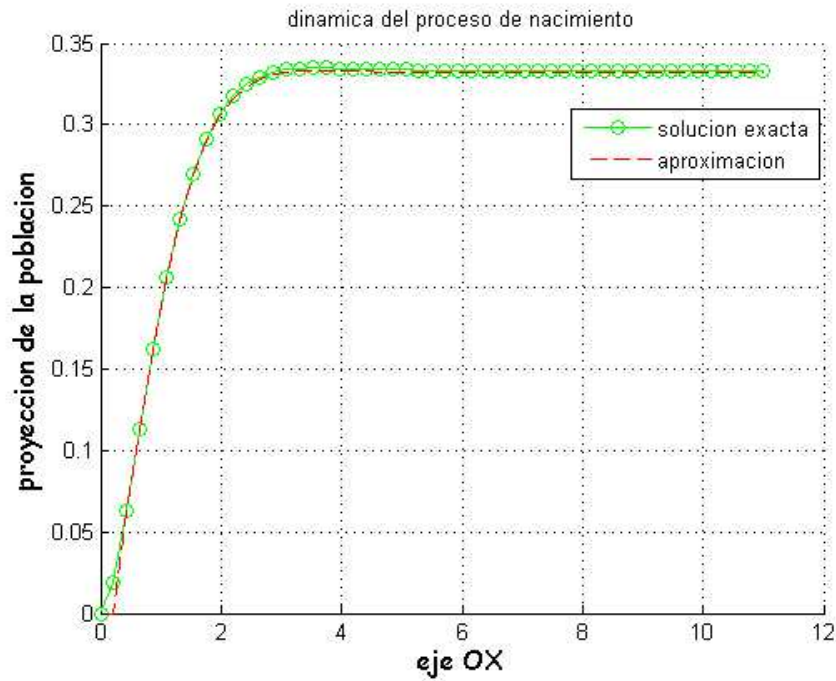


Figura 12: "Aproximación por el Método del trapecio "

tiempo t	expectativa de nacimiento f_i
0.00000000	0.00000000
1.10000000	0.20587216
1.98000000	0.30647258
2.64000000	0.32919488
3.74000000	0.33475334
4.62000000	0.33397388
5.72000000	0.33342367
6.60000000	0.33333480
7.70000000	0.33332827
8.58000000	0.33333163
9.68000000	0.33333317
10.00000000	0.333333284674235

Al comienzo observamos que el nacimiento esperado fluctua; pero empieza a converger en el tiempo $t = 10$. De la tabla, los nacimientos para cada clase de edad se considera a la población sobre un período de un mes , $1/12$ de

cada año después de un número de espacios de tiempo que la proporción de individuos alcanza un equilibrio: Un modelo demográfico estable y para t grande tenemos $k(t) \approx 0.33333333$,

3.4.-Aproximación de ecuaciones integrales de volterra con Splines lineales

El objetivo de esta sección es buscar una función p lineal por tramos aproximación a la solución de (42) .

En cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ definimos p como:
 $p(t) = \frac{1}{h} [(t_{i+1} - t)f_i + (t - t_i)f_{i+1}]$, para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ claramente $p(t)$ es continua en $[t_0, T]$, en (42) remplazamos $p(t)$ por la solución $f(t)$ y haciendo $t = t_{j+1}$ tenemos:

$$p(t_{j+1}) = \int_{t_0}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s, p(s))ds + g(t_{j+1}) \quad (49)$$

Si denotamos con $p(t_i) = f_i$ la igualdad anterior adquiere la forma:

$$f_{j+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s, \frac{1}{h} [(t_{j+1} - s)f_j + (t - t_j)f_{j+1}])ds + r_{j+1} \quad j \geq 0 \quad (50)$$

Donde r_{j+1} no depende de f_{j+1} , r_{j+1} viene dado por:

$$r_{j+1} = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t_{j+1}, s, \frac{1}{h} [(t_{i+1} - s)f_i + (t - t_i)f_{i+1}])ds + g(t_{j+1})$$

$$r_1 = g(t_1)$$

Consideremos

$$F_j(z) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s, \frac{1}{h} [(t_{j+1} - s)f_j + (t - t_j)z])ds + r_{j+1} \quad (51)$$

para $j = 0, 1, n-1$

luego la ecuación (50) puede escribirse como:

$$f_{j+1} = F_j(f_{j+1}) \quad (52)$$

como k satisface la condición de Lipchitz obtenemos:

$|F_j(z) - F_j(u)| \leq \frac{1}{2}Lh|z - u|$ esta desigualdad se convierte en una contracción

siempre que $h < \frac{2}{L}$ si esta condición es satisfecha, la ecuación posee un único punto fijo para cada iteración.

Como la condición inicial $f(t_0) = f_0 = g(t_0)$ es dada; los valores de f_1, f_2, \dots son obtenidos sucesivamente por (50).

En el caso de que la ecuación integral sea lineal podemos escribir la ecuación de manera explícita para f_{j+1} en efecto tenemos que:

$$f_{j+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s) \frac{1}{h} [(t_{j+1} - s)f_j + (s - t_j)f_{j+1}] ds + r_{j+1}$$

Despejando f_{j+1} obtenemos la formula explícita:

$$f_{j+1} = \frac{\alpha f_j + r_{j+1}}{1 - \beta}$$

donde α y β son independientes de los f_j y vienen dados como

$$\alpha = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s)(t_{j+1} - s) ds$$

$$\beta = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k(t_{j+1}, s)(s - t_j) ds$$

Si f es diferenciable una estimación a $f'(t)$ puede ser dada por la derivada de $p(t)$ esto es:

$$p'(t) = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) = f'_i \text{ para } t_i \leq t < t_{i+1}, \text{ con } i = 0, \dots, n-1.$$

Sea $f(t)$ la solución exacta de (42) definimos la función del error de discretización:

$e(t) = f(t) - p(t)$ donde $p(t)$ es la función spline lineal aproximación a $f(t)$, notese que $e(t)$ no es diferenciable en los t_i .

Asumamos que $f(t) \in C^2([t_0, T])$ como $p(t)$ es lineal por tramos se tiene que $p''(t) = 0$ para $t_i < t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Definimos para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$e'(t_i) = f'(t_i) - f'_i$$

con esto y utilizando el teorema de expansión de Taylor para $f(t)$ y restando miembro a miembro con :

$$-p(t) = -f_i - \frac{t - t_i}{h} f_{i+1} + \frac{t - t_i}{h} f_i$$

para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ obtenemos :

$$e(t) = e(t_i) + (t - t_i)e'(t_i) + \frac{(t - t_i)^2}{2}f''(\xi_t) \quad (53)$$

donde $t_i < \xi_t < t \leq t_{i+1}$

Desarrollando en serie de taylor $f'(t)$ en $t = t_i$ y restando miembro a miembro con:

$$p'(t) = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) = f'_i$$

para $t_i \leq t < t_{i+1}$ obtenemos

$$e'(t) = e'(t_i) + (t - t_i)f''(\eta_t) \quad (54)$$

para $t_i < \eta_t < t < t_{i+1}$.

Hacemos $t = t_{i+1}$ en (53) y denotando ξ por ξ_t y luego despejando $e'(t_i)$ obtenemos:

$$e'(t_i) = \frac{e(t_{i+1}) - e(t_i)}{h} - \frac{hf''(\xi)}{2} \quad (55)$$

para $t_i < \xi < t_{i+1}$

sustituyendo (55) en (53) obtenemos :

$$e(t) = \frac{[(t_{i+1} - t_i)e(t_i) + (t - t_i)e(t_{i+1}) - (t - t_i)e(t_i)]}{h} + \frac{(t - t_i)[(t - t_i)f''(\xi_t) - f''(\xi)h]}{2}$$

luego :

$$e(t) = \frac{[(t_{i+1} - t)e(t_i) + (t - t_i)e(t_{i+1})]}{h} + \frac{(t - t_i)[(t - t_i)f''(\eta_t) - f''(\xi)h]}{2} \quad (56)$$

para $t_i \leq t < t_{i+1}$

Definamos : $N(t) = \max_{s \in [t_0, t]} |f''(s)|$

De (56) obtenemos:

$$|e(t)| \leq |e(t_i)| + |e(t_{i+1})| + N(t_{i+1})h^2 \quad (57)$$

para $t_i \leq t < t_{i+1}$

Puesto que ambos $f(t)$ y $p(t)$ satisfacen la ecuación integral (42) en $t = t_i$, restando obtenemos:

$$e(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [k(t_i, s, f(s)) - k(t_i, s, p(s))] ds \quad (58)$$

esto implica

$$|e(t_i)| \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L |e(s)| ds \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(|e(t_j)| + |e(t_{j+1})| + N(t_{j+1})h^2) ds = \sum_{j=0}^{i-1} hL(|e(t_j)| + |e(t_{j+1})| + N(t_{j+1})h^2)$$

pasando $Lhe(t_i)$ al primer miembro de esta desigualdad y dividiendo entre $1 - Lh$ siempre que $1 > Lh$ obtenemos:

$$|e(t_i)| \leq \frac{2Lh}{1 - Lh} \sum_{j=0}^{i-1} |e(t_j)| + \frac{Lih^3}{1 - Lh} N(t_i) \quad (59)$$

con $e(t_0) = 0$, una acotación para $|e(t_i)|$ se puede obtener por el teorema (3.1).

Este resultado lo enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema 3.4 Si la ecuación (42) satisface el teorema (1.5) y asumamos que $f(t) \in C^2[t_0, T]$ y sea $N(t) = \max_{s \in [t_0, t]} |f''(s)|$ entonces el error de discretización del método satisface:

$$|e(t_i)| \leq \left(\frac{Lh^2}{1 - Lh} N(t_i)(t_i - t_0) \right) \exp \left(\frac{2L}{1 - Lh} (t_i - t_0) \right) \quad (60)$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ siempre que $h < \frac{1}{L}$

Prueba

En (59) basta usar el teorema (3.1) tomando $r = 1$, $A = \frac{2Lh}{1 - Lh}$, $B(i) = \frac{iLh^3}{1 - Lh} N(t_i)$, $\eta = 0$.

Del teorema es inmediato ver que el método es exacto, si la solución es una función lineal.

Para la acotación de la función error $e(t)$ sobre el intervalo $[t_0, T]$ tenemos el siguiente colorario:

Corolario 3.1

En las condiciones del teorema anterior existe una constante $C > 0$ tal que para cada $t \in [t_0, T]$ se cumple:

$$\begin{aligned} |e(t)| &\leq Ch^2 \\ |e'(t)| &\leq Ch \end{aligned}$$

Prueba

De (60), puesto que $t_i - t_0 = ih$ es inmediato ver que:

$$|e(t_i)| = O(h^2)$$

entonces se tiene:

$$|e(t_i)| \leq M_1 h^2, \quad 0 < h < \min \left\{ \delta(M_1), \frac{1}{L} \right\} \quad (61)$$

Ahora utilizando (57) y (61) obtenemos

$$|e(t)| \leq M_1 h^2 + M_1 h^2 + N h^2 = C_1 h^2$$

de (61) y (55) obtenemos

$$|e'(t_i)| \leq M_2 h$$

De (54) tenemos

$$|e'(t)| \leq C_2 h$$

para $t \in [t_0, T]$, tomando $C = \max \{C_1, C_2\}$ obtenemos el resultado.

Hemos demostrado que el error de aproximación de la derivada es de orden h para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$ en esta parte podemos demostrar bajo condiciones adicionales que el error es de orden h^2 en el punto medio de cada intervalo.

Para esto asumamos que $f(t) \in C^3[t_0, T]$, de forma analoga a (52) y (53) expandimos $e(t)$ como $e'(t)$ en serie de taylor alrededor de $t = t_i$ obtenemos para $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$e(t) = e(t_i) + (t - t_i)e'(t_i) + \frac{1}{2}(t - t_i)^2 f''(t_i) + \frac{1}{6}(t - t_i)^3 f'''(\xi_t) \quad (62)$$

donde $t_i < \xi_t < t$ tambien

$$e'(t) = e'(t_i) + (t - t_i)f''(t_i) + \frac{1}{2}(t - t_i)^2 f'''(\eta_t) \quad (63)$$

con $t_i < \eta_t < t$

Haciendo $t = t_{i+1}$ en (62) y tomando $\xi_{t_{i+1}} = \xi$ y resolviendo la ecuación para $e'(t_i)$ y luego sustituyendo en (62) obtenemos:

$$e(t) = \frac{1}{h} [(t_{i+1} - t)e(t_i) + (t - t_i)e(t_{i+1})] + \phi(t) \quad (64)$$

donde:

$$\phi(t) = (t - t_i)(t - t_{i+1}) \frac{f''(t_i)}{2} + [(t - t_i)^2 f'''(\xi_t) - h^2 f'''(\xi)] \frac{(t - t_i)}{6}$$

donde $t_i < \xi < t$

Asumamos que el núcleo $k(t, s, y)$ posee derivadas primeras y segundas continuas y acotadas con respecto a la tercera variable en $t_0 \leq s \leq t \leq T$ bajo esta condición podemos desarrollar en serie de taylor alrededor de $f(s)$ de la siguiente manera:

$$k(t_i, s, p(s)) = k(t_i, s, f(s)) - k_y(t_i, s, f(s))e(s) + \frac{1}{2}k_{yy}(t_i, s, f^*(s))e(s)^2$$

luego

$$k(t_i, s, f(s)) - k(t_i, s, p(s)) = k_y(t_i, s, f(s))e(s) - \frac{1}{2}k_{yy}(t_i, s, f^*(s))e(s)^2$$

donde $f^*(s)$ esta entre $f(s)$ y $p(s)$

usando el corolario (3.1) y desde que las derivadas estan acotadas se tiene:

$$k(t_i, s, f(s)) - k(t_i, s, p(s)) = k_y(t_i, s, f(s))e(s) + O(h^4) \quad (65)$$

Sustituyendo (65) en la ecuación (58) obtenemos:

$$e(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k_y(t_i, s, f(s))e(s)ds + O(h^4) \quad (66)$$

Tomando la diferencia entre las dos ecuaciones al reemplazar i por k y $k+1$ en (66) obtenemos:

$$\begin{aligned} e(t_{k+1}) - e(t_k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [k_y(t_{k+1}, s, f(s)) - k_y(t_k, s, f(s))] e(s)ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} k_y(t_{k+1}, s, f(s))e(s)ds \\ &\quad + O(h^4) \end{aligned}$$

Si asumimos que $k_y(t, s, y)$ satisface la condición de lipchitz en la primera variable:

$$|k_y(t^*, s, y) - k_y(\bar{t}, s, y)| \leq L_1 |x^* - \bar{x}| \text{ donde } t_0 \leq t^*, \bar{t} \leq T$$

De esta ultima ecuación y usando el corolario (3.1) concluimos que:

$$|e(t_{k+1}) - e(t_k)| \leq L_1 h \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |e(s)| ds + O(h^3)$$

esto implica por el corolario (3.1) que:

$$|e(t_{k+1}) - e(t_k)| = O(h^3) \quad (67)$$

Luego tomando la derivada en la ecuación (64) y haciendo $i = k$ obtenemos:
 $e'(t) = \frac{1}{h}(e(t_{k+1}) - e(t_k)) + f''(t_k)(t - t_k - \frac{h}{2}) + O(h^2)$
 tomando $t = t_k + \frac{h}{2}$ en esta ultima ecuación y usando (67) concluimos que:

$$\left| e'(t_k + \frac{h}{2}) = O(h^2) \right| \quad (68)$$

estos resultados lo enunciamos en el siguiente teorema

Teorema 3.5 En las condiciones del teorema (3.4) si asumimos ademas que $f \in C^3[t_0; T]$ y $k(t, s, y)$ posee primera y segunda derivada acotadas con respecto a y , ademas $k_y(t, s, y)$ satisface la condición de lipchitz en la primera variable entonces existe un $C > 0$ tal que para cada $k = 0, 1, 2..$

$$\left| f'(t_k + \frac{h}{2}) - p'(t_k + \frac{h}{2}) \right| \leq Ch^2 \quad (69)$$

Prueba

La prueba sigue de (68).

Corolario 3.2 Si las condiciones del teorema (3.5) son satisfechas y definimos

$\bar{p}(t_k) = \frac{1}{2} [p'(t_k - \frac{h}{2}) + p'(t_k + \frac{h}{2})]$ para $k = 1, 2, 3..$ entonces existe una constante C tal que:

$$|f'(t_k) - \bar{p}(t_k)| \leq Ch^2 \quad (70)$$

Prueba

De (68) tenemos que

$$\bar{p}(t_k) = \frac{1}{2} \left[p'(t_k - \frac{h}{2}) + p'(t_k + \frac{h}{2}) \right] = \frac{1}{2} \left[f'(t_k - \frac{h}{2}) + f'(t_k + \frac{h}{2}) \right] + O(h^2) \quad (71)$$

como $f \in C^3[t_0; T]$, desarrollando en serie de taylor f' en t_k y haciendo luego $t = t_k - \frac{h}{2}$ y luego en $t = t_k + \frac{h}{2}$ se tiene:

$$f'(t_k - \frac{h}{2}) = f'(t_k) - \frac{h}{2}f''(t_k) + \frac{1}{8}h^2f'''(\xi_1)$$

para $t_k - \frac{h}{2} < \xi_1 < t_k$

$$f'(t_k + \frac{h}{2}) = f'(t_k) + \frac{h}{2}f''(t_k) + \frac{1}{8}h^2f'''(\xi_2)$$

para $t_k < \xi_2 < t_k + \frac{h}{2}$

Sumando estas 2 ultimas igualdades obtenemos :

$$\frac{f'(t_k - \frac{h}{2}) + f'(t_k + \frac{h}{2})}{2} = f'(t_k) + O(h^2)$$

asi de (71) se tiene:

$$\bar{p}(t_k) = f'(t_k) + O(h^2)$$

esto concluye la prueba.

Este corolario manifiesta que podemos obtener una estimación muy mejorada de la derivada en los nodos tomando este igual al término medio de las pendientes de la función lineal de aproximación en los puntos medios de dos intervalos en la que el nodo es el punto medio.

Ejemplos numéricos

Ejemplo 3.5

Consideremos la siguiente ecuación integral de volterra :

$$f(t) = 1 - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{2} + \int_0^t \frac{1+t}{1+s} f(s) ds$$

para $0 \leq t \leq 1$ cuya solución exacta es $f(t) = 1 - t^2$

El nucleo de la ecuación es $k(t, s, y) = \frac{1+t}{1+s}y$ es inmediato verificar que este nucleo es lipchitz en la tercera variable y que $k_y(t, s, y)$ satisface la misma condición en la primera variable desde que $0 \leq s \leq t \leq T$

Aproximación para $h = 0.01$

t(i)	f _i	f(t(i))	error	p'(i)	$\bar{p}(i)$	f'(t(i))
0.00	1.000000000	1.000000000	0.000000000	-0.10184184	0.000000000	-0.000000000
0.20	0.95959447	0.960000000	0.00040553	-0.50262874	-0.40242108	-0.400000000
0.40	0.83902209	0.840000000	0.00097791	-0.90362026	-0.80335767	-0.800000000
0.60	0.63823878	0.640000000	0.00176122	-1.30488246	-1.20454767	-1.200000000
0.80	0.35718658	0.360000000	0.00281342	-1.70649577	-1.60606764	-1.600000000
0.90	0.18653700	0.190000000	0.00346300	-1.90746443	-1.80698010	-1.800000000
1.00	-0.00420944	0.000000000	0.00420944	0.000000000	0.000000000	-2.000000000

Aproximación para $h = 0.05$

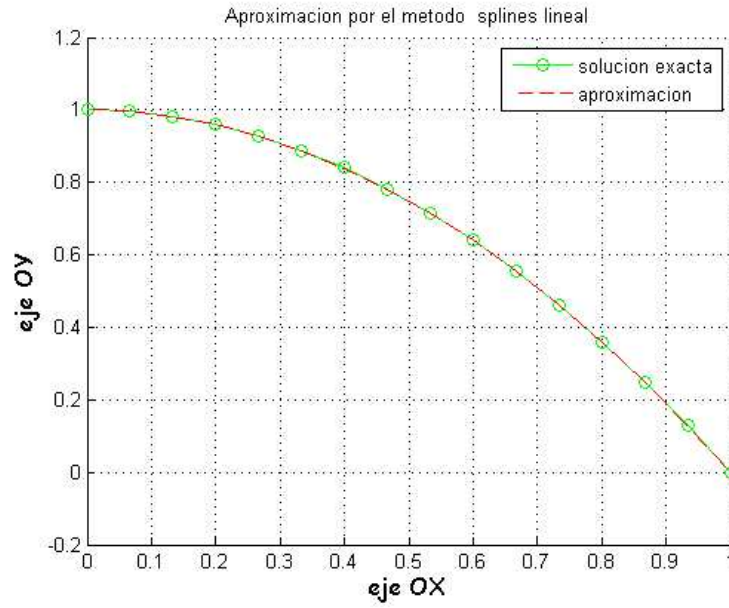


Figura 13: "Ejemplo 3.5:Aproximación por splines lineales"

$t(i)$	f_i	$f(t(i))$	error	$p'(i)$	$\bar{p}(i)$	$f'(t(i))$
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000	-0.05043801	0.00000000	-0.00000000
0.20	0.95989874	0.96000000	0.00010126	-0.45062887	-0.40060300	-0.40000000
0.40	0.83975585	0.84000000	0.00024415	-0.85086883	-0.80083612	-0.80000000
0.60	0.63956036	0.64000000	0.00043964	-1.25117396	-1.20113227	-1.20000000
0.80	0.35929783	0.36000000	0.00070217	-1.65156377	-1.60151046	-1.60000000
0.90	0.18913578	0.19000000	0.00086422	-1.85179777	-1.80173747	-1.80000000
1.00	-0.00105041	0.00000000	0.00105041	0.00000000	0.00000000	-2.00000000

Aproximación para $h = 0.025$

$t(i)$	f_i	$f(t(i))$	error	$p'(i)$	$\bar{p}(i)$	$f'(t(i))$
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000	-0.02510680	0.00000000	-0.00000000
0.10	0.98998850	0.99000000	0.00001150	-0.22512904	-0.20012615	-0.20000000
0.20	0.95997469	0.96000000	0.00002531	-0.42515384	-0.40015061	-0.40000000
0.40	0.83993898	0.84000000	0.00006102	-0.82521291	-0.80020882	-0.80000000
0.60	0.63989013	0.64000000	0.00010987	-1.22528798	-1.20028278	-1.20000000
0.80	0.35982453	0.36000000	0.00017547	-1.62538387	-1.60037721	-1.60000000
0.90	0.18978404	0.19000000	0.00021596	-1.82544143	-1.80043390	-1.80000000
1.00	-0.00026248	0.00000000	0.00026248	0.00000000	0.00000000	-2.00000000

Ejemplo 3.6

Consideremos la siguiente ecuación integral de volterra :

$$f(t) = 1 + t^2 - t^3 + \int_0^t \frac{2st}{1+s^2} f(s) ds$$

para $0 \leq t \leq 1$ cuya solución exacta es $f(t) = 1 + t^2$

El nucleo de la ecuación es $k(t, s, y) = \frac{2st}{1+s^2}y$ es inmediato verificar que este nucleo es lipchitz en la tercera variable y que $k_y(t, s, y)$ satisface la misma condición en la primera variable desde que $0 \leq s \leq t \leq T$

Aproximación para $h = 0.1$

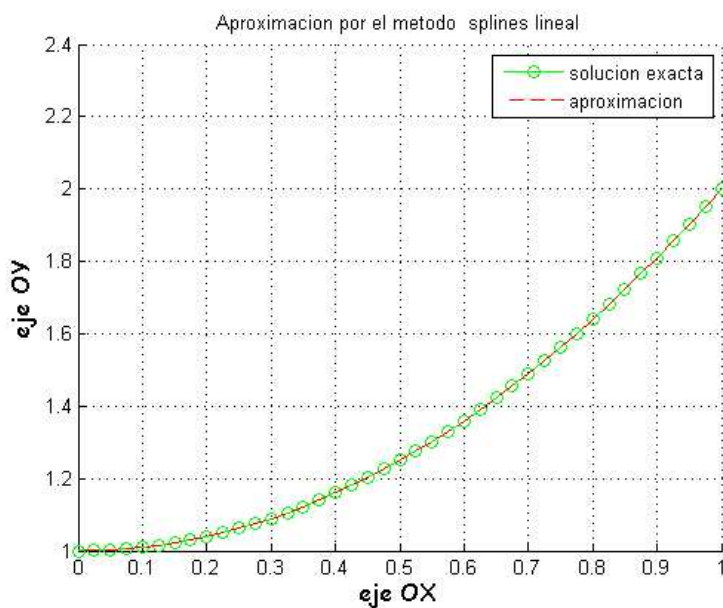


Figura 14: "Ejemplo 3.6:Aproximación por splines lineales:"

t(i)	f _i	f(t(i))	error	p'(i)	$\bar{p}(i)$	f'(t(i))
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000	0.10001661	0.00000000	0.00000000
0.10	1.01000166	1.01000000	-0.00000166	0.30011474	0.20006568	0.20000000
0.30	1.09004361	1.09000000	-0.00004361	0.70057898	0.60044188	0.60000000
0.50	1.25019478	1.25000000	-0.00019478	1.10136713	1.00114990	1.00000000
0.70	1.49052058	1.49000000	-0.00052058	1.50251980	1.40220535	1.40000000
0.90	1.81110028	1.81000000	-0.00110028	1.90419437	1.80373581	1.80000000
1.00	2.00151972	2.00000000	-0.00151972	0.00000000	0.00000000	2.00000000

Aproximación para $h = 0.05$

t(i)	f _i	f(t(i))	error	p'(i)	$\bar{p}(i)$	f'(t(i))
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000	0.02500007	0.00000000	0.00000000
0.10	1.01000010	1.01000000	-0.00000010	0.22500393	0.20000316	0.20000000
0.30	1.09000272	1.09000000	-0.00000272	0.62502892	0.60002678	0.60000000
0.50	1.25001215	1.25000000	-0.00001215	1.02507426	1.00007088	1.00000000
0.70	1.49003246	1.49000000	-0.00003246	1.42514120	1.40013632	1.40000000
0.90	1.81006857	1.81000000	-0.00006857	1.82523805	1.80023094	1.80000000
1.00	2.00009469	2.00000000	-0.00009469	0.00000000	0.00000000	2.00000000

3.5.-Aproximación de ecuaciones integrales mediante polinomios de Bernstein

Una base distinta de la canónica del espacio P_n de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n nos la proporcionan los polinomios básicos de Bernstein los mismos que se emplean en teoría de la aproximación para demostrar el teorema de Weierstrass de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios; su construcción parte de la fórmula del binomio:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Tomando $x = t - a$ y $y = b - t$ obtenemos:

$$1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(t - a)^{n-i} (b - t)^i}{(b - a)^n}$$

los polinomios :

$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} \frac{(t - a)^{n-i} (b - t)^i}{(b - a)^n}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Son llamados los polinomios básicos de Bernstein (Sergei Natanovich Bernstein), sobre $[a; b]$ y cada uno de estos polinomios es de grado n . Estos polinomios forman una base de P_n y las coordenadas de cada polinomio en esta base son llamados coeficientes de Bezier.

Weierstrass demostró el año 1885 que toda función $f \in C([a; b]; \mathbb{R})$ puede aproximarse tanto como se quiera por un polinomio, esto es, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $\|p - f\|_\infty < \epsilon$; la demostración que dio, de este importante resultado fue hecha también por Bernstein en el año 1912 y tiene la ventaja de ser constructiva. La demostración original de Weierstrass no es constructiva, es decir, dada la función f demuestra que existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}$ que convergen uniformemente a f , sin explicitar la forma de estos polinomios.

Definición 3.5 Dada una función $f \in C([a; b]; \mathbb{R})$ se llama polinomio de Bernstein de grado k asociado a la función f , al polinomio:

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^k f\left(\frac{i(b-a)}{k} + a\right) b_i^k(t)$$

Entre las propiedades más importantes de los polinomios básicos de Bernstein para $t \in [a, b]$ tenemos:

1. $b_i^k(t) \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$
2. $\sum_{i=0}^k b_i^k(t) = 1$
3. $\sum_{i=0}^k \frac{i}{k} b_i^k(t) = t$
4. $b_i^k(t) = b_i^{k-i}(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$

Teorema 3.6 Dada una función continua $f \in C([a; b]; \mathbb{R})$ la sucesión de polinomios $\{B_k\}$ converge uniformemente a f

Prueba

Ver [14]

Consideremos la ecuación integral de primera especie dada por

$$g(t) = \int_a^t k(t, s) f(s) ds \quad (71)$$

Para $a \leq t \leq b$, donde $f(t)$ es una función desconocida a determinar; $k(t, s)$ es una función continua y $g(t)$ es una función continua.

Una aproximación a la solución de (71) se puede obtener con los polinomios básicos de Bernstein sobre $[a, b]$ de la forma:

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^n c_i b_i^n(t) \quad (72)$$

Donde los c_i son constantes desconocidas a determinar $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Sustituimos (72) en (71) e imponemos la condición de igualdad para hallar los c_i , así obtenemos :

$$\sum_{i=0}^n c_i \alpha_i(t) = g(t) \quad (73)$$

Donde

$$\alpha_i(t) = \int_a^t k(t, s) b_i^n(s) ds$$

ahora tomemos $t = t_j$ $j = 0, 1, \dots, n$ estos t_j son puntos en (a, b) y son elegidos sugeridos por la definición (3.5) con $a < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < b$ donde t_0 es tomado próximo a a y t_n es tomado próximo a b . Tomando los otros puntos $t = t_j$ y reemplazándolos sucesivamente en (73) obtenemos así un sistema lineal:

$$\sum_{i=0}^n c_i \alpha_{ij} = g_j \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Donde: $\alpha_{ij} = \alpha_i(t_j)$, $g_j = g(t_j)$ con $i, j = 0, 1, \dots, n$ y

El sistema lineal es resuelto hallándose los valores de los c_j y así reemplazarlos en (72) para obtener así una aproximación polinomial a la solución de (71).

Ahora consideremos una ecuación integral de segunda especie lineal:

$$f(t) = g(t) + \int_{t_0}^t k(t, s) f(s) ds \quad (74)$$

Si $f(t)$ es dado como en (72), sustituyendo en (74) obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n c_i b_i^n(t) &= g(t) + \int_{t_0}^t k(t, s) \left(\sum_{i=0}^n c_i b_i^n(s) \right) ds \\ \sum_{i=0}^n c_i b_i^n(t) - \int_{t_0}^t k(t, s) \left(\sum_{i=0}^n c_i b_i^n(s) \right) ds &= g(t) \\ \sum_{i=0}^n c_i \left(b_i^n(t) - \int_{t_0}^t k(t, s) b_i^n(s) ds \right) &= g(t) \\ \sum_{i=0}^n c_i L_i(t) &= g(t)\end{aligned}$$

Donde

$$L_i(t) = b_i^n(t) - \int_{t_0}^t k(t, s) b_i^n(s) ds$$

$i = 0, 1, \dots, n$, si tomamos los t_j apropiados como en el caso anterior obtenemos:

$$\sum_{i=0}^n c_i l_{ij} = g_j \quad j = 0, 1, \dots, n$$

, donde $l_{ij} = L_i(t_j)$; y $g_j = g(t_j)$

Resolviendo el sistema para los c_j y obtener así una aproximación polinomial a la función desconocida $f(t)$

Ejemplo numéricos

Ejemplo 3.7 Consideremos la ecuación integral de primera especie:

$$\int_0^t \frac{f(s)}{t^2 + s^2} ds = t$$

cuya solución exacta es:

$$f(t) = \frac{4}{4-\pi} t^2$$

Aplicando el método ilustrado necesitamos resolver el sistema

$$\sum_{i=0}^n c_i \alpha_{ij} = g_j$$

Para $j = 0, 1, \dots, n$ y $g_j = g(t_j)$ donde

$$\alpha_{ij} = \int_0^{t_j} \frac{b_{i,n}(s)}{t_j^2 + s^2} ds$$

y elijamos $t_0 = 10^{-10}$ y sugeridos por la identidad

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^k f\left(\frac{i}{k}\right) b_i^k(t)$$

elijamos los nodos $t_i = t_0 + \frac{i}{n+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

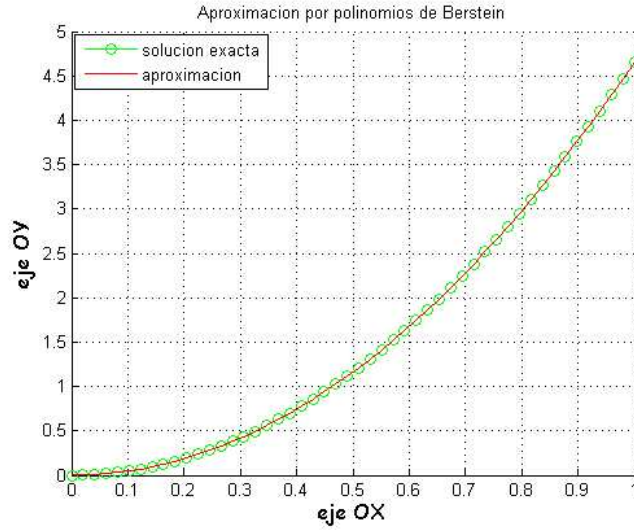


Figura 15: "Aproximación mediante 8 polinomios de Berstein"

t(i)	f _i	f(t(i))	error
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.09090909	0.03851068	0.03851068	0.00000000
0.18181818	0.15404272	0.15404272	0.00000000
0.27272727	0.34659613	0.34659613	0.00000000
0.36363636	0.61617089	0.61617089	0.00000000
0.45454545	0.96276702	0.96276702	0.00000000
0.54545455	1.38638451	1.38638451	0.00000000
0.63636364	1.88702336	1.88702336	0.00000000
0.72727273	2.46468357	2.46468357	0.00000000
0.81818182	3.11936514	3.11936514	0.00000000
0.90909091	3.85106807	3.85106807	0.00000000

Consideremos la ecuación integral de segunda especie:

$$f(t) = e^t + \int_0^t 2\cos(t-s)f(s)ds$$

en $0 \leq t \leq 1$

cuya solución exacta es:

$f(t) = e^t(t+1)^2$ Aproximacion con 8 polinomios

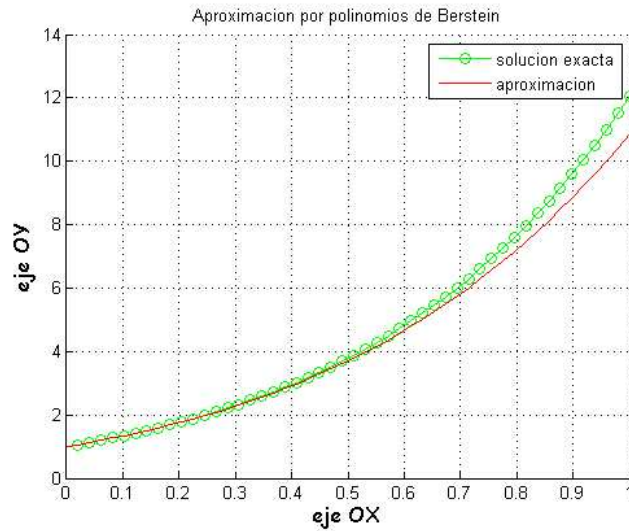


Figura 16: "Aproximación con 8 polinomios de Berstein"

t(i)	f _i	f(t(i))	error
0.00000000	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.11111111	1.38017866	1.37965317	0.00052548
0.22222222	1.87039811	1.86556436	0.00483375
0.33333333	2.49985564	2.48108876	0.01876688
0.44444444	3.30522739	3.25402927	0.05119812
0.55555556	4.33255453	4.21740943	0.11514510
0.66666667	5.63960171	5.41037234	0.22922938
0.77777778	7.29880574	6.87922546	0.41958028
0.88888889	9.40096168	8.67865378	0.72230790

Aproximacion con 15 polinomios

t(i)	f _i	f(t(i))	error
0.00000000	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.09523810	1.31973043	1.31940602	0.00032440
0.19047619	1.71753024	1.71460540	0.00292484
0.28571429	2.21087771	2.19974874	0.01112897
0.38095238	2.82102811	2.79127691	0.02975120
0.47619048	3.57381725	3.50825938	0.06555788
0.57142857	4.50063458	4.37277937	0.12785520
0.66666667	5.63960175	5.41037234	0.22922941
0.76190476	7.03699982	6.65052442	0.38647540
0.85714286	8.74899731	8.12723912	0.52175819
0.95238095	10.84374247	9.87968087	0.86406161

3.6.-Aproximación de ecuaciones integrales mediante polinomios ortogonales

Dado el intervalo $[a; b]$ consideremos una función w no negativa en $[a; b]$ llamada función peso que verifica:

- $w \in L^1[a; b]$
- Todos los momentos $\mu_k = \int_a^b t^k w(t) dt$, $t = 0, 1, \dots$ existen y son finitos
- Para todo polinomio $q(t)$ no negativo en $[a; b]$, tal que $\int_a^b q(t) w(t) dt = 0$ implica que $q(t) \equiv 0$

Estas condiciones son satisfechas por ejemplo si w es continua y positiva en $[a; b]$

Consideremos el espacio vectorial:

$$L_w^2[a; b] = \left\{ f : \int_a^b f^2(t)w(t)dt < +\infty \right\}$$

El espacio $L_w^2[a; b]$ es un espacio de Hilbert, con producto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(t)f(t)g(t)dt$$

y la norma dada por

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)w(t)dt$$

El conjunto \mathbb{P} de todos los polinomios en $[a, b]$ es un subespacio de $L_w^2([a, b])$

Denotemos con $\overline{\Pi_j} = \{p \in \mathbb{P} : p^\circ = j\}$ y $\Pi_j = \{p \in \mathbb{P} : p^\circ \leq j\}$:

El siguiente teorema establece la existencia de una sucesión de polinomios mutuamente ortogonales, asociado con la función peso $w(t)$ en $L_w^2[a; b]$, la construcción de estos polinomios ortogonales esta basada en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicada al conjunto l.i $B = \{1, t, t^2, t^3, \dots\}$

Teorema 3.7 Existen polinomios $p_i \in \overline{\Pi_i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ tal que

$$\langle p_i, p_k \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq k$$

Estos polinomios son únicos definidos por la recursión:

$$p_{i+1}(t) = (t - a_{i+1})p_i(t) - b_{i+1}^2 p_{i-1}(t)$$

, para $i \geq 0$ donde $p_0(t) = 1$, $p_{-1}(t) = 0$ y

$$a_{i+1} = \frac{\langle tp_i, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}$$

para $i \geq 0$ y

$$b_{i+1}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{\langle p_i, p_i \rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

Prueba. Ver [14]

Tomando la función peso $w(t) = 1$ y el intervalo $[-1; 1]$ los polinomios p_i nos conducen a los clasicos polinomios de Legendre:

$L_0(t) = 1, L_1(t) = t, L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \dots$, ligados por la relación

$$L_i(t) = \frac{(2i)!}{2^i i! i!} p_i(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Tomando la función peso $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ y el intervalo $[-1; 1]$ los polinomios p_i nos conducen a los clásicos polinomios de Chebishev :

$T_0(t) = 1, T_1(t) = t, T_2(t) = 2t^2 - 1, T_3(t) = 4t^3 - 3t, \dots$, ligados por la relación

$$T_i(t) = 2^{i-1} p_i(t) \quad i = 1, 2, \dots$$

También se pueden considerar los polinomios de Laguerre y los polinomios de Hermite tomando como función peso e intervalo $w(t) = e^{-t}$, $[0; \infty+)$ y $w(t) = e^{-t^2}$, $\langle -\infty; \infty+ \rangle$ respectivamente. Utilizando el hecho de que $C([a, b])$ es denso en $L_w^2([a, b])$ la ortonormalización de los polinomios p_i nos conduce a un conjunto ortonormal total y por tanto a una base de Hilbert de $L_w^2([a, b])$. Así para toda $f \in L_w^2([a, b])$ se tiene que

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}_i p_i \quad \text{con} \quad \tilde{f}_i = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\|p_i\|^2}$$

La proyección ortogonal en el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a N para f es:

$$P_N(f) = \sum_{i=0}^N \tilde{f}_i p_i$$

Este polinomio puede ser considerado como una aproximación polinomial a la función f .

Se tiene que $\|f - P_N(f)\| \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, $\forall f \in L_w^2[-1; 1]$

Corolario 3.3 Para toda $p \in \Pi_{n-1}$ se tiene:

$$\langle p, p_n \rangle = 0 \tag{75}$$

Teorema 3.7 Las raíces t_i , $i = 1, \dots, n$ de p_n son reales y simples, todas yacen en el intervalo (a, b)

Prueba. Ver [14]

Teorema 3.8 Consideremos la matriz A de orden $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} p_0(t_1) & p_0(t_2) & \dots & p_0(t_n) \\ p_1(t_1) & p_1(t_2) & \dots & p_1(t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & p_{n-1}(t_2) & \dots & p_{n-1}(t_n) \end{pmatrix}$$

esta matriz es no singular para cualesquiera $t_i \in (a, b)$ distintos dos a dos.

Prueba. Ver [14]

Polinomios de Chebyshev

Podemos tambien introducir los polinomios de Chebishev definiendolos como:

$$T_n(t) = \cos(n\theta)$$

donde $\theta = \arccos(t)$, $t \in [-1; 1]$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ evidentemente $|T_n(t)| \leq 1$

Aunque a primera vista no parezca evidente, la función $T_n(t)$ es en efecto un polinomio en t , en efecto si $n = 0$

$$T_0(t) = 1$$

si $n = 1$

$$T_1(t) = t$$

Ahora bien, para calcular los polinomios sucesivos, se puede apelar a la fórmula de recurrrencia, utilizando las conocidas fórmulas de suma y difer-

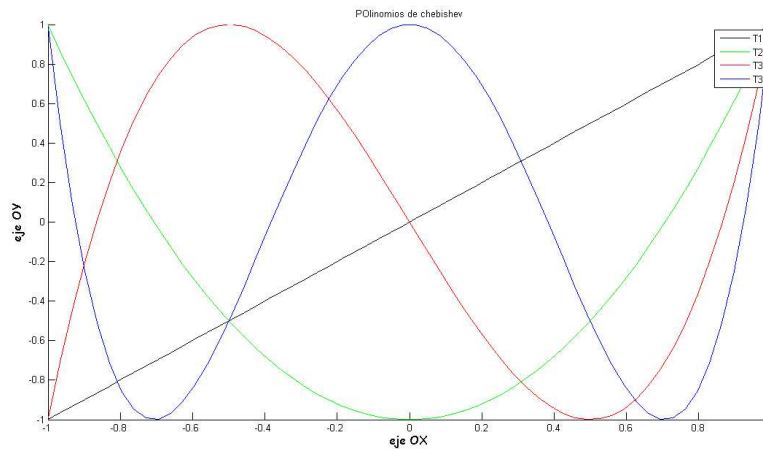


Figura 17: "Polinomios de chebishev: T_1 , T_2 , T_3 , T_4 "

encia para el coseno obtenemos:

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \quad (76)$$

A partir de este resultado, es posible determinar, por reiteración, los polinomio de Chebyshev.

Una propiedad importante de los polinomios de Chebyshev es:

$$2T_k(t) = \frac{1}{k+1}T'_{k+1}(t) - \frac{1}{k-1}T'_{k-1}(t) \quad (77)$$

La expansión de Chebyshev de una función $f \in L^2_w(-1;1)$ es :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k T_k(t) \quad \text{con} \quad \hat{f}_k = \frac{2c_k}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_k(t) dt$$

donde $c_0 = 2$, $c_k = 1$ para $k \geq 1$.

Sin perdida de generalidad consideremos la ecuación integral de volterra:

$$g(t) + \int_{-1}^t k(t, s, f(s)) ds = f(t) \quad (78)$$

definido en $-1 < s < t \leq 1$

Pues si se tuviera.

$$u(t) + \int_{t_0}^t R(t, s) y(s) ds = y(t)$$

$t \in [t_0 T]$, T finito.

Esta ecuación se puede transformar en otra equivalente definida en $[-1, 1]$.

Para esto consideremos el cambio de variable:

$$t = T + \frac{T - t_0}{2}(x - 1); -1 \leq x \leq 1$$

de donde

$$\frac{2(t-T)}{2} + 1 = x$$

Con esto podemos reescribir la ecuación como:

$$g(x) + \int_{t_0}^{T + \frac{T-t_0}{2}(x-1)} R(T + \frac{T-t_0}{2}(x-1), s) y(s) ds = f(x)$$

donde:

$$g(x) = u(T + \frac{T-t_0}{2}(x-1)); f(x) = y(T + \frac{T-t_0}{2}(x-1))$$

Ahora realizamos un nuevo cambio de variable en la integral de la ecuación para transformar el intervalo $[t_0, T + \frac{T-t_0}{2}(x-1)]$ en $[-1, x]$, para esto consideremos la transformación:

$$s = T + \frac{T-t_0}{2}(\tau-1) \text{ para } \tau \in [-1; x] \text{ con esto tenemos que :}$$

$$g(x) + \int_{-1}^x k(x, \tau) f(\tau) d\tau = f(x)$$

para $x \in [-1, 1]$ donde: $k(x, \tau) = \frac{T-t_0}{2} R(T + \frac{T-t_0}{2}(x-1), T + \frac{T-t_0}{2}(\tau-1))$

Consideremos la partición de $[-1; 1]$ dada por los puntos: $t_n = -\cos(\frac{\pi n}{N})$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ estos puntos son los extremos del polinomio de chebyshev de orden N :

$T_N(t) = \cos(N \arccos(t))$, estos puntos son llamados puntos de Gauss-Chebyshev-Lobatto.

Ahora consideremos la aproximación a $k(t_n, s, f(s))$ en el intervalo $[t_0, t_n]$ dada por :

$$k(t_n, s, f(s)) \approx \sum_{j=0}^{n-1} T_j(s) w_{nj} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (79)$$

Donde los $T_j(s)$ son los polinomios de chebyshev.

Sustituyendo en esta ultima ecuación s consecutivamente por t_0, t_1, \dots, t_{n-1} , obtenemos un sistema dado por :

$$\begin{bmatrix} T_0(t_0) & T_1(t_0) & \dots & T_n(t_0) \\ T_0(t_1) & T_1(t_1) & \dots & T_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_0(t_{n-1}) & T_1(t_{n-1}) & \dots & T_n(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{n0} \\ w_{n1} \\ \vdots \\ w_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(t_n, t_0, F_0) \\ k(t_n, t_1, F_1) \\ \vdots \\ k(t_n, t_n, F_n) \end{bmatrix}$$

Si denotamos con B a la primera matriz del lado izquierdo por el teorema (3.8) esta matriz es no singular; entonces si $B^{-1} = (\beta_{ij})$ entonces

$$w_{nj} = \sum_{k=0}^n \beta_{jk} k(t_n, t_k, F_k)$$

De (79) integrando en ambos miembros obtenemos:

$$\int_{-1}^{t_n} k(t_n, s, f(s)) ds \approx \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^{t_n} T_j(s) ds w_{nj} = \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} a_{nj}$$

donde

$$\int_{-1}^{t_n} T_j(s) ds = a_{nj}$$

Para $0 \leq j \leq n-1$, $n = 1, 2, \dots, N$ pueden ser obtenidos analíticamente en efecto de (77) tenemos:

$$T_j(t) = \frac{1}{2(j+1)} T'_{j+1}(t) - \frac{1}{2(j-1)} T'_{j-1}(t)$$

integrando ambos miembros obtenemos:

$$a_{nj} = \frac{1}{2(j+1)} \int_{-1}^{t_n} T'_{j+1}(t) dt - \frac{1}{2(j-1)} \int_{-1}^{t_n} T'_{j-1}(t) dt$$

de donde obtenemos:

$$a_{nj} = \frac{1}{2(j+1)} (T_{j+1}(t_n) - (-1)^{j+1}) - \frac{1}{2(j-1)} (T_{j-1}(t_n) - (-1)^{j-1})$$

luego una aproximación a la solución f de (78) en los nodos t_n es dada por F_n que es dada por:

$$g(t_n) + \sum_{j=0}^{n-1} w_{nj} a_{nj} = F_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Asi podemos obtener de manera explicita F_n aproximación para $f(t_n)$

Ejemplo numéricos

Ejemplo 3.8 Consideremos la ecuación integral de segunda especie:

$$f(t) = \int_{-1}^t e^{2(t-s)} \sin(t-s) f(s) ds - 2$$

en $0 \leq t \leq 1$

cuya solución exacta es:

$$f(t) = -\frac{5}{2} - (t + \frac{1}{2})e^{2t+2}$$

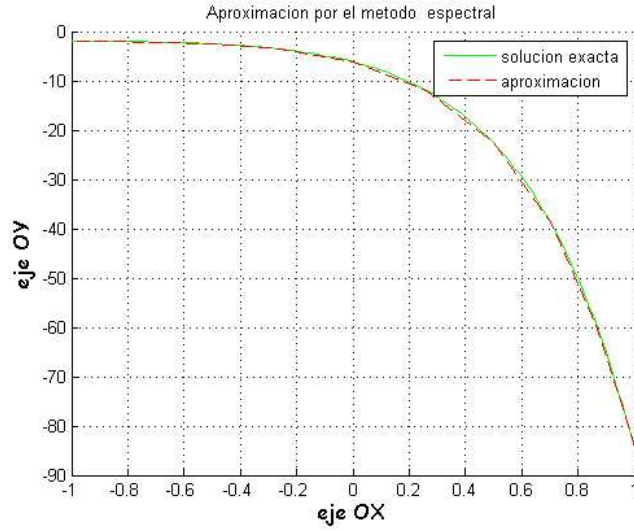


Figura 18: "Aproximación por el método Espectral"

t(i)	f(t(i))	f _i	error
-1.00000000	-2.00000000	-2.00000000	0.00000000
-0.96592583	-2.00121517	-2.00124269	0.00002752
-0.86602540	-2.02150205	-2.02143052	0.00007153
-0.70710678	-2.12795272	-2.12803193	0.00007921
-0.50000000	-2.50000000	-2.49997122	0.00002878
-0.25881905	-3.56200022	-3.56184011	0.00016012
-0.00000000	-6.19452805	-6.19522476	0.00069671
0.25881905	-11.90880683	-11.90696409	0.00184275
0.50000000	-22.58553692	-22.58831984	0.00278292
0.70710678	-39.18764203	-39.18573235	0.00190967
0.86602540	-59.55160253	-59.55163209	0.00002956
0.96592583	-77.26416247	-77.26421436	0.00005189
1.00000000	-84.39722505	-84.39715864	0.00006641

Ejemplo 3.9

Consideremos la ecuación integral de segunda especie dada por:

$$f(t) = -\frac{t^8}{56} + t^6 - \frac{t}{7} - \frac{1}{8} + \int_{-1}^t (t-s)f(s)ds$$

Cuya solución exacta es $f(t) = t^6$

-0.96816024	0.82258601	0.82353765	0.00095164
-0.83603111	0.32184818	0.34145590	0.01960772
-0.61337143	-0.02099753	0.05325266	0.07425019
-0.32425342	-0.14753258	0.00116227	0.14869485
0.00000000	-0.21802756	0.00000000	0.21802756
0.32425342	-0.26348337	0.00116227	0.26464564
0.61337143	-0.23048974	0.05325266	0.28374240
0.83603111	0.05181118	0.34145590	0.28964472
0.96816024	0.52275854	0.82353765	0.30077911

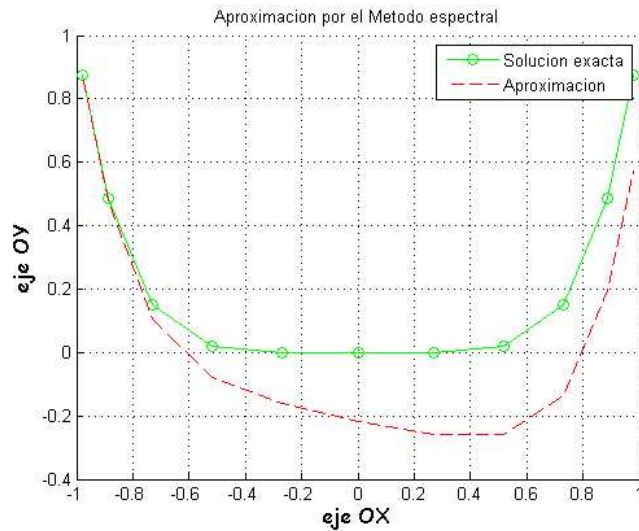


Figura 19: "Aproximación mediante 8 polinomios de Chevishev"

Método de colocación de legendre

Consideremos el conjunto de $\{t_i\}_{i=0}^N$ de los $N + 1$ puntos de colocacion de Gauss, Gauss-Radau o Gauss-Lobatto.

Haciendo $t = t_i$ en (78) obtenemos:

$$g(t_i) + \int_{-1}^{t_i} k(t_i, s)f(s)ds = f(t_i) \quad (80)$$

para $0 \leq i \leq N$

Consideremos para cada $i = 1, 2, \dots, N$ la transformación:

$$s_i(\theta) = \frac{1+t_i}{2}\theta + \frac{t_i-1}{2}$$

que transforma en intervalo $[-1; 1]$ en $[-1; t_i]$, utilizando esta transformación como un cambio de variable en (80) obtenemos.

$$g(t_i) + \frac{t_i+1}{2} \int_{-1}^1 k(t_i, s_i(\theta)) f(s_i(\theta)) d\theta = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (81)$$

Aproximamos la integral de (81) con una formula de cuadratura en los $N+1$ puntos de colocación de gauss tomando los respectivos pesos $\{w_j\}$ de lagrange.

$$g(t_i) + \frac{t_i+1}{2} \sum_{j=0}^N k(t_i, s_i(\theta_j)) f(s_i(\theta_j)) \omega_j = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (82)$$

donde $\theta_i = t_i ; i = 0, 1, 2, \dots, N$

Ahora para representar $f(s_i(\theta_j))$, expandimos $f(s_i(\theta))$ usando interpolación polinomial de lagrange en $[-1; 1]$ tomando los nodos como los puntos de colocación de Gauss-Lobato asi tenemos:

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^N f_k F_k(t)$$

para $t = s_i(\theta)$, tenemos

$$f(s_i(\theta)) \approx \sum_{k=0}^N f_k F_k(s_i(\theta)) \quad (83)$$

donde F_k es el k-esimo polinomio basico de lagrange combinando (82) y (83) obtenemos.

$$g_i + \frac{t_i+1}{2} \sum_{j=0}^N f_j \left(\sum_{r=0}^N k(t_i, s_i(\theta_r)) F_j(s_i(\theta_r)) \omega_r \right) = f_i \quad (84)$$

$0 \leq i \leq N$

Denotando con $U^N = [f_0, f_1, \dots, f_N]$ y $G^N = [g_0, g_1, \dots, g_N]$ podemos escribir las ecuaciones en forma matricial

$$G^N + A * U^N = U^N$$

Donde las entradas de la matriz A vienen dadas por

$$A_{i,j} = \frac{1+t_i}{2} \sum_{r=0}^N k(t_i, s_i(\theta_r)) F_j(s_i(\theta_r)) \omega_r$$

Ahora para calcular de manera mas eficiente $F_j(s_i(\theta_r))$, expresamos $F_j(s)$ en términos de los polinomios de legendre asi:

$$F_j(s) = \sum_{r=0}^N \alpha_{r,j} L_r(s)$$

. Donde los $\alpha_{r,j}$ son los coeficientes discretos del polinomio $F_j(s)$ y pueden ser calculados mediante

$$\alpha_{r,j} = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{i=0}^N F_j(t_i) L_r(t_i) w_i = \frac{L_r(t_j) w_j}{\gamma_r}$$

Donde

$$\gamma_r = \sum_{i=0}^N L_r^2(x_i) w_i = (r + \frac{1}{2})^{-1}, \quad r < N$$

y $\gamma_N = (N + \frac{1}{2})^{-1}$ para Gauss y Gauss-radau y $\gamma_N = \frac{2}{N}$ para los nodos de Gauss-lobatto

Ejemplo numéricos

Ejemplo 3.10 Consideremos la ecuación integral de volterra de segunda especie dada por:

$$f(x) = e^{4x} + \frac{1}{x+4} (e^{x(x+4)} - e^{-(x+4)}) + \int_{-1}^x e^{xs} f(s) ds = f(x)$$

cuya solución exacta es: e^{4x}

El método descrito nos proporciona la siguiente aproximación:

$t(i)$	f_i	$f(t(i))$	error
-0.98418305	0.01951174	0.01951187	0.00000013
-0.91759840	0.02546662	0.02546644	0.00000018
-0.80157809	0.04050552	0.04050571	0.00000019
-0.64234934	0.07658187	0.07658168	0.00000018
-0.44849275	0.16629831	0.16629848	0.00000017
-0.23045832	0.39778929	0.39778912	0.00000017
0.00000000	0.99999983	1.00000000	0.00000017
0.23045832	2.51389499	2.51389480	0.00000019
0.44849275	6.01328367	6.01328389	0.00000023
0.64234934	13.05795308	13.05795280	0.00000028
0.80157809	24.68787788	24.68787822	0.00000034
0.91759840	39.26735870	39.26735833	0.00000038
0.98418305	51.25085049	51.25085080	0.00000031

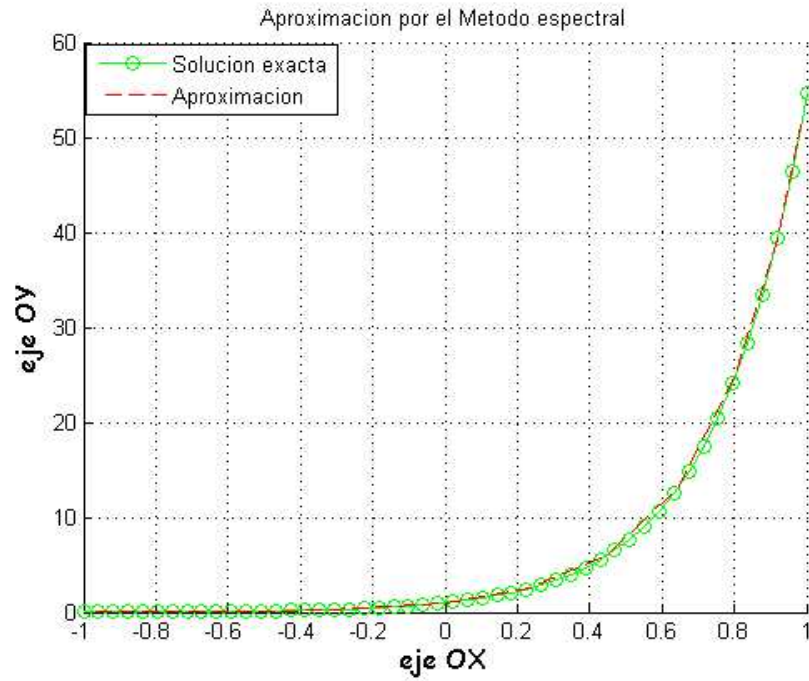


Figura 20: "Aproximacion por el Metodo Espectral "

Ejemplo 3.11 Consideremos la ecuación integral de volterra de segunda

especie dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}(\cos(2x) - \cos(2)) + \int_{-1}^x f(s)ds$$

Cuya solución exacta es $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

3.6.-Ecuaciones integrodiferenciales

En esta última parte presentaremos algunos métodos simples para la aproximación de ecuaciones integrodiferenciales de la forma

$$f'(t) = H(t, f(t), \int_0^t k(t, s, f(s))ds) \quad (85)$$

con condición inicial $f(0) = \alpha$

Bajo las condiciones:

$$|k(t, s, u_1) - k(t, s, u_2)| \leq L_1 |u_1 - u_2|$$

$$|H(t, s_1, u) - H(t, s_2, u)| \leq L_2 |s_1 - s_2|$$

$$|H(t, s, u_1) - H(t, s, u_2)| \leq L_3 |u_1 - u_2|$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$

Bajo estas condiciones la ecuación (85) posee una única solución continua, esto sigue del siguiente teorema.

Teorema 3.8 Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t, s, \mathbf{f}(s))ds$$

y asumamos que

i) $\mathbf{g}(t)$ es continua

ii) $\mathbf{K}(t, s, \mathbf{u})$ es una función continua en $0 \leq s \leq t$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

iii) Si el núcleo satisface la condición de lipschitz

$\|\mathbf{K}(t, s, \mathbf{u}_1) - \mathbf{K}(t, s, \mathbf{u}_2)\| \leq L \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|$ donde $\|\cdot\|$ es la norma del máximo entonces la ecuación posee una única solución continua en $0 \leq t \leq T$

Prueba

La prueba es análoga a la del teorema (1.5) reemplazando valor absoluto por norma.

Ahora integrando (85) de 0 a t y usando la condición inicial obtenemos el sistema de ecuaciones integrales

$$f(t) = \alpha + \int_0^t H(s, f(s), h(s))ds$$

$$h(t) = \int_0^t k(t, s, f(s))ds$$

Definiendo $\mathbf{f}(t) = (f(t), h(t))$, $g(t) = (\alpha, 0)$, $\mathbf{K}(t, s, \mathbf{f}(s)) = (H(s, f(s), h(s)), k(t, s, f(s)))$ esto es

$$\mathbf{K}(t, s, \mathbf{u}) = (H(s, u_1, u_2), k(t, s, u_1))$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}(t, s, \mathbf{u}) - \mathbf{K}(t, s, \mathbf{v})\| &= \max \{|H(s, u_1, u_2) - H(s, v_1, v_2)|, |k(t, s, u_1) - k(t, s, v_1)|\} \leq \\ &\max \{L_2 |u_1 - v_1| + L_3 |u_2 - v_2|, L_1 |u_1 - v_1|\} \\ &\leq \max \{L_2 + L_3, L_1\} \max \{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\} \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \\ &\text{donde } L = \max \{L_2 + L_3, L_1\} \end{aligned}$$

Del teorema anterior se sigue que (85) posee una única solución continua.

Consideremos la ecuación integrodiferencial de volterra

$$f'(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, f(s))ds \quad (86)$$

Para la implementación de un método numérico reescribimos en la forma de (85):

$$f'(t) = H(t, f(t), z(t)) \quad (87)$$

Donde

$$z(t) = \int_0^t k(t, s, f(s))ds \quad (88)$$

Para eliminar la derivada de la función incógnita integramos (87) de t_{n-1} a t_n asi obtenemos

$$f(t_n) = f(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(s, f(s), z(s))ds \quad (89)$$

Ahora si utilizamos la regla del trapecio para aproximar la integral en 7 obtenemos:

$$F_n = F_{n-1} + \frac{h}{2} \{H(t_n, F_n, Z_n) - H(t_{n-1}, F_{n-1}, Z_{n-1})\} \quad (90)$$

Donde Z_n es una aproximación a z_n utilizando la regla del trapecio en (99) con $Z_0 = 0$ se obtiene:

$$Z_n = \frac{h}{2} k(t_n, t_0, F_0) + h \sum_{i=1}^{n-1} k(t_n, t_i, F_i) + \frac{h}{2} k(t_n, t_n, F_n) \quad (91)$$

para $n = 1, 2, \dots$

Para hallar los F_n podemos utilizar algun método iterativo por ejemplo bisección, newton, etc, podemos tomar como punto inicial $F_n^0 = F_{n-1}$ donde la sucesión $\{F_n^i\}$ converge a F_n y podemos tomar como condición de parada $|F_n^i - F_n^{i-1}| < 10^{-6}$, por ejemplo:

Para el caso lineal y aplicando la regla trapezoidal compuesta para la ecuación (88) obtenemos:

$$Z_n = \int_0^{t_n} k(t_n, s)f(s)ds \approx \frac{h}{2}k(t_n, t_0)F_0 + h \sum_{i=1}^{n-1} k(t_n, t_i)F_i + \frac{h}{2}k(t_n, t_n)F_n$$

Sustituyendo esto en (90) obtenemos:

$$F_n = F_{n-1} + \frac{h}{2} \left[(g_{n-1} - g_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_{n-1,i}k_{n-1,i} + \omega_{ni}k_{n,i})F_i + \frac{h}{2}\omega_{n,n}k_{n,n}F_n \right]$$

Donde los $\omega_{n,i}$ son los pesos de la regla de cuadratura trapezoidal: $\omega_{n,0} = \omega_{n,n} = \frac{1}{2}$, $\omega_{n,i} = 1$ para $0 < i < n$

En forma equivalente despejando F_n

$$F_n = \frac{1}{1 - \frac{h^2}{4}\omega_{n,n}k_{n,n}} \left\{ F_{n-1} + \frac{h}{2} \left[(g_{n-1} - g_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_{n-1,i}k_{n-1,i} + \omega_{ni}k_{n,i})F_i \right] \right\}$$

El orden de convergencia del método es 2.

Ejemplo numérico

Ejemplo 3.12 Consideremos la ecuación integrodiferencial de volterra dada por:

$$f'(t) = 2t - \frac{t^5}{4} - t^3 + \int_0^t stf(s)ds$$

Cuya solución exacta es $f(t) = t^2 + 2$

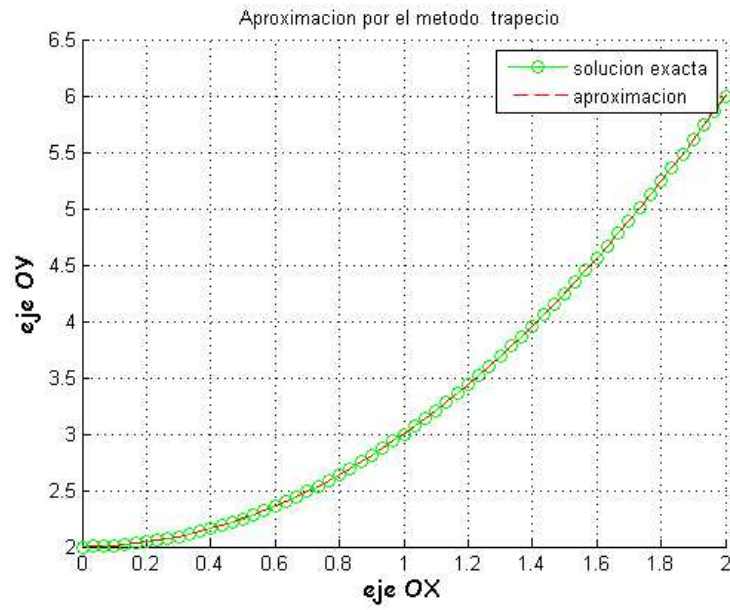


Figura 21: "Método Trapezoidal "

t(i)	h=0.04	h=0.02
0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.16000000	0.01119998	0.00599999
0.32000000	0.02399937	0.01239980
0.48000000	0.03679622	0.01879888
0.64000000	0.04958695	0.02519629
0.80000000	0.06236631	0.03159067
0.96000000	0.07512713	0.03798015
1.12000000	0.08785981	0.04436225
1.28000000	0.10055133	0.05073358
1.44000000	0.11318350	0.05708941
1.60000000	0.12573002	0.06342283
1.76000000	0.13815152	0.06972349
1.92000000	0.15038725	0.07597538
2.00000000	0.15640737	0.07907561

Métodos de orden más alto pueden ser construidos de manera similar.

Trabajos Recientes

Haremos una breve descripción de algunos trabajos recientes sobre aproximación numérica para ecuaciones integrales de Volterra.

K. Maleknejad y E. Naja utilizan la técnica de quasilinealización para solucionar numéricamente las ecuaciones integrales de Volterra con núcleos no crecientes con respecto a la función desconocida, este método produce dos sucesiones acopladas de ecuaciones integrales de Volterra lineales donde las soluciones de estas dos secuencias convergen monótonamente para la solución de la ecuación no lineal. Usando métodos de colocación resuelven numéricamente estas ecuaciones lineales acopladas y obtienen dos sucesiones de aproximaciones que convergen para la solución de la ecuación no lineal, acompaña con experimentos numéricos.

A. Shahsavaran presenta un acercamiento numérico para solucionar la ecuación integral de Abel de segunda especie basada en el uso de Función Bloque de Pulso (BPF) y la expansión Taylor por el método de colocación. También analiza del error para el método propuesto y muestra la eficiencia del método, acompaña con experimentos numéricos.

A. Vahidian Kamyad, M. Mehrabinezhad, J. Saberi-Nadjafi dan un acercamiento nuevo para la Solución numérica ecuaciones integrales de Volterra lineales y no lineales de primera y segunda especie. Utilizando cálculo de variaciones, (que permite resolver muchos problemas de aplicaciones) transforma el problema original a otro equivalente en cálculo de variaciones. Usando métodos de discretización obtienen un problema de programación no lineal y en algunos casos uno de programación lineal. Usando técnicas de optimización obtienen una solución optimal para el PL o PNL de acuerdo al caso, con un error controlable por la solución original, acompaña con experimentos numéricos.

A. Tahmasbi presenta un método numérico para solucionar numéricamente ecuaciones integrales lineales de Volterra basándose en el método de serie de potencias. El método propuesto proviene de la expansión de Taylor de la solución exacta de la ecuación integral, usando cálculos simples obtiene una solución aproximada aceptable. En el caso de ecuaciones con soluciones polinómicas, el método propuesto es exacto. También da algunas comparaciones con algunos otros métodos que hacen notar su efectividad, acompaña con experimentos numéricos.

Darja Saveljeva en su tesis doctoral estudia el método de colocación con splines cúbicos para la ecuación integral de Volterra.

Joshua H. Gordis adapta una modificación del método trapezoidal usado

para aproximar ecuaciones de Fredholm a las ecuaciones de volterra de la siguiente manera, inicia con un numero de nodos igualmente espaciados , calcula una solución aproximada asociada a esta malla resolviendo un sistema de ecuaciones algebraicas, el método decide si esta malla requiere un refinamiento y especifica donde, en esta situación considera los puntos medios de cada intervalo así logra una mejor precisión para la solución en los nodos fijados, acompaña con experimentos numéricos.

Bibliografia

- [1] Burden and J. Faires, Numerical Analysis, 6. ed., International Thomson Publishing company, Pacific Grove, 1997
- [2] Elaydi, S., An Introduction to Difference Equations, 2. ed., Springer-Verlag, New York, 1999.
- [3] Sung kyu Choy, Boundedness of the solutions of volterra difference equations, Journal of the chungcheong mathematical society volumen 20 2007 4962.
- [4] M.R. Crisci, E. Russo, A. Vecchio, Periodic Solution of Whole Line Difference Equations, J. Differ. Equations Appl. 10, 357368 (2004).
- [5] Andrei D. Polyanin, Alexander V. Manzhirov. Handbook of integral equations; CRC Press LLC 1998
- [6] A. Tahmasbi; A New Approach to the Numerical Solution of Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind; Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 32, 1607 - 1610
- [7] H. Brunner, Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations, Cambridge University Press (2004).
- [8] Mostefa Nadir; Modified Method for Solving Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind Using Simpsons Rule International Journal: Mathematical Manuscripts. Volume 1 Number 1 (2007), pp. 141146
- [9] D. Saveljeva; Quadratic spline collocation for Volterra integral equations; University of Tartu, Estonia
- [10] Erwin Kreyszig; Introductory functional analysis with applications; John Wiley 1978
- [11] Complex Variables and Applications; third edition McGRAW-HILL BOOK COMPANY 1976
- [12] P. Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations, SIAM, Philadelphia, 1985.

- [13] A. Vecchio, Stability of direct quadrature methods for system of Volterra integral equations, *Dynam. Systems Appl.* 7 (1998), 501518.
- [14] J. Store, R. Burlirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition.
- [15] Dorian-Boris Pougaza , *The Lotka Integral Equation as a Stable Population Model*, African Institute for Mathematical Sciences (AIMS).
- [16] Jim M Cushing, *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics* , Berlin [u.a.] : Springer, 1977..